

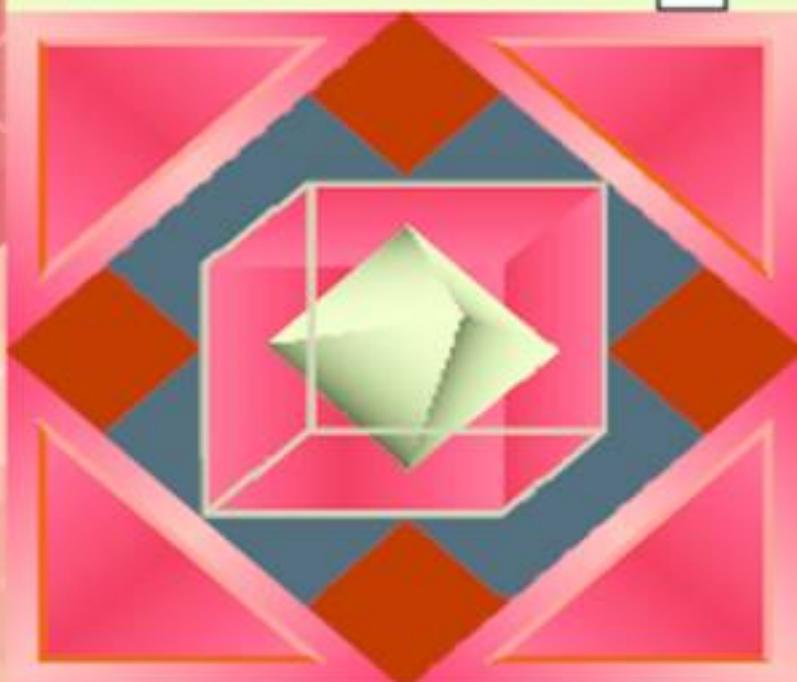


**С. М. Саакян  
В. Ф. Бутузов**



# Геометрия

10



11

**Поурочные  
разработки**



**С. М. Саакян  
В. Ф. Бутузов**



# Геометрия

**Поурочные  
разработки**

**10-11** КЛАССЫ

Учебное пособие  
для общеобразовательных  
организаций

*2-е издание, переработанное*

Москва «Просвещение» 2017

УДК 372.8:514  
ББК 74.262.21  
С12

16+

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

**Саакян С. М.**

**С12** Геометрия. Поурочные разработки. 10—11 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / С. М. Саакян, В. Ф. Бутузов. — М. : Просвещение, 2017. — 2-е изд., перераб. — 232 с. : ил. (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-043092-0.

Учебное пособие предназначено для учителей, преподающих геометрию в 10—11 классах по учебнику авторов Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Л. С. Кисёловой, Э. Г. Позняка. Оно написано в соответствии с методической концепцией этого учебника, полностью соответствует ему как по содержанию, так и по структуре.

Книга содержит контрольные и самостоятельные работы, карточки для устного опроса, комментарии и решения к наиболее сложным задачам, варианты тематического планирования.

УДК 372.8:514  
ББК 74.262.21

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

**Саакян** Самвел Манасович, **Бутузов** Валентин Фёдорович

## **ГЕОМЕТРИЯ**

### **Поурочные разработки**

#### **10—11 классы**

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования

Редакция математики и информатики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *Л. В. Кузнецова*. Младший редактор *Е. А. Андреевкова*. Художники *О. П. Богомолова*, *О. Г. Иванова*. Художественный редактор *О. П. Богомолова*. Компьютерная графика *А. Г. Вьюниковской*. Техническое редактирование и компьютерная верстка *Н. В. Лукиной*. Корректор *Е. В. Павлова*

Подписано в печать 00.00.16. Формат 60×90<sup>1/16</sup>.

Гарнитура Школьная. Печ. л. 14,5. Заказ №

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».

127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

ISBN 978-5-09-043092-0

© Издательство «Просвещение», 2013, 2017

© Художественное оформление.

Издательство «Просвещение», 2013, 2017

Все права защищены

## Предисловие

Книга написана в соответствии с методической концепцией учебника, нацеленного на достижение учащимися тех результатов обучения, которые прописаны в ФГОС как требование к освоившим основную образовательную программу основного общего образования. Это относится как к предметным результатам, т. е. к получению и накоплению учащимися геометрических знаний, так и к не менее важным метапредметным и личностным результатам, включающим умение применять полученные знания в практической деятельности, способность к творческой работе, стремление к получению образования более высокого уровня, всестороннее развитие личности.

Учебник можно использовать как на базовом, так и на углублённом уровне изучения математики. Ниже приведено примерное тематическое планирование учебного материала по геометрии для каждого из двух уровней. В поурочных разработках по каждой теме сформулированы задачи уроков, обсуждается примерный план их проведения, приведены комментарии по вопросам теории, решения некоторых задач из учебника, задания для самостоятельных и контрольных работ, образцы слайдов, карточки-задания для проведения зачётов по разным темам.

Эти разработки ориентированы на тот вариант, когда на геометрию отводится два часа каждую неделю (всего 68 часов за учебный год). Но приведённые рекомендации пригодны и для базового уровня. Теоретический материал и задачи, не являющиеся обязательными на базовом уровне, отмечены в тексте учебника. В тех классах с углублённым изучением математики, где на геометрию отведено три часа в неделю, дополнительное время можно посвятить разбору задач повышенной трудности, а также изучению дополнительного материала по планиметрии, содержащегося в главе VIII.

Изучение курса стереометрии базируется на сочетании наглядности и логической строгости. Опора на наглядность — неперенное условие успешного усвоения материала, и в связи с этим нужно уделить большое внимание правильному изображению на чертеже пространственных фигур. Хотя правила изображения приведены в конце учебника в Приложении 1, с самого начала необходимо показывать учащимся, как нужно изображать те или иные фигуры, поскольку при работе по данному учебнику уже на первых уроках появится куб, параллелепипед, тетраэдр.

Однако наглядность должна быть пронизана строгой логикой. Курс стереометрии предъявляет в этом отношении более высокие требования к учащимся. В отличие от курса планиметрии здесь уже с самого начала формулируются аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве, и далее изучение свойств взаимного расположения прямых и плоскостей проходит на основе этих аксиом. Тем самым задаётся высокий уровень строго-

сти в логических рассуждениях, который должен выдерживаться на протяжении всего курса.

Теоретический материал в учебнике изложен доступно для большинства учащихся. Это способствует решению важной педагогической задачи — научить работать с книгой. Те или иные разделы учебника в зависимости от уровня подготовленности класса учитель может предложить учащимся для самостоятельного изучения.

Важная роль при изучении стереометрии отводится задачам. Учебник содержит большое количество разнообразных по трудности задач, что даёт возможность осуществить индивидуальный подход к учащимся, в частности организовать работу с наиболее сильными, проявляющими интерес к математике.

Как при изучении теоретического материала, так и при решении задач полезно использовать слайды. Они дают возможность вести работу одновременно с большим числом учащихся, вовлекать их в активное обсуждение рассматриваемых вопросов, контролировать усвоение изучаемого материала.

Учителю следует иметь в виду, что все приведённые в книге рекомендации являются примерными, их не нужно рассматривать как обязательные.

На всех уроках геометрии нужно исходить из того, что изучение этого предмета направлено не только на достижение предметных целей — знакомство с различными геометрическими фигурами и их свойствами, развитие пространственного воображения, но и на решение более важных задач, определённых ФГОС — формирование личности учащегося, развитие его логического мышления, умения ясно, точно и обоснованно излагать свои мысли и утверждения, всестороннее развитие творческих способностей учащихся.

Для подготовки математических диктантов, самостоятельных и контрольных работ можно использовать также следующие пособия издательства «Просвещение»: 1) Б. Г. Зив. «Дидактические материалы. 10 класс»; 2) Б. Г. Зив. «Дидактические материалы. 11 класс»; 3) Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. Г. Баханский. «Задачи по геометрии. 7—11 классы». Далее первые две книги будут упоминаться как [1] и [2].

Помимо указанных пособий можно использовать электронную форму учебника (ЭФУ), которая расширяет и дополняет материал печатного учебника. Функциональными особенностями ЭФУ являются удобный и понятный интерфейс и навигация; работа в онлайн- и офлайн-режимах; тестовые задания к каждой теме, разделу учебника; наличие инструментов изменения размера шрифта, создания заметок и закладок.

К педагогическим возможностям использования ЭФУ относятся организация контроля и самоконтроля по результатам изучения темы; реализация технологий мобильного дистанционного или смешанного обучения; реализация требований ФГОС по формированию информационно-образовательной среды системой электронных образовательных ресурсов и др.

# Примерное тематическое планирование учебного материала

● — БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ — ●

## 10 класс

На изучение тем по геометрии отводится 54 ч, из них на заключительное повторение вопросов параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей — 5 ч.

№ урока	Содержание учебного материала
<b>Введение. Аксиомы стереометрии и их следствия (4 ч)</b>	
1	Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии (пп. 1, 2)
2	Некоторые следствия из аксиом (п. 3)
3, 4	Решение задач на применение аксиом стереометрии и их следствий. Самостоятельная работа № В.1 (20 мин)
<b>Глава I. Параллельность прямых и плоскостей (15 ч)</b>	
§ 1. Параллельность прямых, прямой и плоскости	
5	Параллельные прямые в пространстве. Параллельность трёх прямых (пп. 4, 5)
6	Параллельность прямой и плоскости (п. 6)
7, 8	Повторение теории, решение задач на параллельность прямой и плоскости. Самостоятельная работа № 1.1 (15 мин)
§ 2. Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми	
9	Скрещивающиеся прямые (п. 7)
10	Углы с сонаправленными сторонами. Угол между прямыми (пп. 8, 9)
11—13	Повторение теории, решение задач. Контрольная работа № 1.1 (20 мин)
§ 3. Параллельность плоскостей	
14, 15	Параллельные плоскости. Свойства параллельных плоскостей (пп. 10, 11)

№ урока	Содержание учебного материала
§ 4. Тетраэдр и параллелепипед	
16—18  19	Тетраэдр. Параллелепипед (пп. 12, 13). Задачи на построение сечений (п. 14). Повторение теории, решение задач. Контрольная работа № 1.2 Зачёт № 1 по теме «Параллельность в пространстве»
<b>Глава II. Перпендикулярность прямых и плоскостей (18 ч)</b>	
§ 1. Перпендикулярность прямой и плоскости	
20  21  23, 24	Перпендикулярные прямые в пространстве. Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости (пп. 15, 16) Признак перпендикулярности прямой и плоскости (п. 17) Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости (п. 18). Решение задач на перпендикулярность прямой и плоскости. Самостоятельная работа № 2.1 (15 мин)
§ 2. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью	
25  26 27—30	Расстояние от точки до плоскости. Теорема о трёх перпендикулярах (пп. 19, 20) Угол между прямой и плоскостью (п. 21) Повторение теории. Решение задач на применение теоремы о трёх перпендикулярах, на угол между прямой и плоскостью. Самостоятельная работа № 2.2 (15 мин)
§ 3. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей	
31, 32  33, 34 35 36, 37	Двугранный угол. Признак перпендикулярности двух плоскостей (пп. 22, 23) Прямоугольный параллелепипед (п. 24) Повторение теории и решение задач Контрольная работа № 2.1. Зачёт № 2 по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей»
<b>Глава III. Многогранники (12 ч)</b>	
§ 1. Понятие многогранника. Призма	

<b>№ урока</b>	<b>Содержание учебного материала</b>
38—40	Понятие многогранника. Призма (пп. 27, 28, 30). Самостоятельная работа № 3.1 (15—20 мин)
§ 2. Пирамида	
41—44	Пирамида. Правильная пирамида. Усечённая пирамида (пп. 32—34). Самостоятельная работа № 3.2 (15—20 мин)
§ 3. Правильные многогранники	
45—47	Симметрия в пространстве. Понятие правильного многогранника. Элементы симметрии правильных многогранников (пп. 35—37). Теорема Эйлера (п. 29*)
48, 49	Контрольная работа № 3.1. Зачёт № 3 по теме «Многогранники. Площадь поверхности призмы и пирамиды»
<b>Заключительное повторение тем геометрии 10 класса (5 ч)</b>	
50, 51	Аксиомы стереометрии и их следствия. Параллельность прямых и плоскостей Перпендикулярность прямых и плоскостей. Многогранники Заключительный урок-беседа по курсу геометрии 10 класса
52, 53	
54	

● — **БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ** — ●

## 11 класс

На изучение тем по геометрии отводится 54 ч, из них на заключительное повторение — 8 ч.

<b>№ урока</b>	<b>Содержание учебного материала</b>
<b>Глава IV. Цилиндр, конус и шар (10 ч)</b>	
§ 1. Цилиндр	
1—3	Понятие цилиндра. Площадь поверхности цилиндра (пп. 38, 39). Самостоятельная работа № 4.1

№ урока	Содержание учебного материала
§ 2. Конус	
4—6	Понятие конуса. Площадь поверхности конуса. Усечённый конус (пп. 40—42)
§ 3. Сфера	
7—10	Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости. Касательная плоскость к сфере. Площадь сферы (пп. 43—46). Контрольная работа № 4.1 (15 мин)
<b>Глава V. Объёмы тел (16 ч)</b>	
§ 1. Объём прямоугольного параллелепипеда	
11—13	Понятие объёма. Объём прямоугольного параллелепипеда (пп. 52, 53). Самостоятельная работа № 5.1
§ 2. Объём прямой призмы и цилиндра	
14, 15	Объём прямой призмы. Объём цилиндра (пп. 54, 55)
§ 3. Объём наклонной призмы, пирамиды и конуса	
16—19	Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла. Объём наклонной призмы. Объём пирамиды (пп. 56—58). Самостоятельная работа № 5.2. Объём конуса (п. 59)
§ 4. Объём шара и площадь сферы	
20—24 25, 26	Объём шара и его частей. Площадь сферы (пп. 60—62*) Контрольная работа № 5.1. Зачёт № 5 по теме «Объёмы тел»
<b>Глава VI. Векторы в пространстве (5 ч)</b>	
§ 1. Понятие вектора в пространстве	
27	Понятие вектора. Равенство векторов (пп. 63, 64)

№ урока	Содержание учебного материала
§ 2. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число	
28, 29	Сложение и вычитание векторов. Сумма нескольких векторов. Умножение вектора на число (пп. 65—67)
§ 3. Компланарные векторы	
30, 31	Компланарные векторы. Правило параллелепипеда. Разложение вектора по трём некопланарным векторам (пп. 68—70)
<b>Глава VII. Метод координат в пространстве. Движения (15 ч)</b>	
§ 1. Координаты точки и координаты вектора	
32	Прямоугольная система координат в пространстве (п. 71)
33, 34	Координаты вектора (п. 72). Самостоятельная работа № 7.1. Связь между координатами векторов и координатами точек (п. 73)
35—37	Простейшие задачи в координатах (п. 74). Самостоятельная работа № 7.2 Уравнение сферы (п. 75)
§ 2. Скалярное произведение векторов	
38, 39	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов (пп. 76, 77)
40	Вычисление углов между прямыми и плоскостями (п. 78). Повторение вопросов теории и решение задач. Самостоятельная работа № 7.3
41, 42	Уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости (п. 79*)
§ 3. Движения	
43, 44	Центральная симметрия (п. 80). Осевая симметрия (п. 81). Зеркальная симметрия (п. 82). Параллельный перенос (п. 83)
45, 46	Контрольная работа № 7.1. Зачёт № 7 по теме «Метод координат в пространстве»

№ урока	Содержание учебного материала
<b>Заключительное повторение при подготовке учащихся к итоговой аттестации по геометрии (8 ч)</b>	
47	Аксиомы стереометрии и их следствия. Параллельность прямых, прямой и плоскости. Скрещивающиеся прямые. Параллельность плоскостей. Перпендикулярность прямой и плоскости. Теорема о трёх перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей Многогранники: параллелепипед, призма, пирамида, площади их поверхностей Цилиндр, конус и шар, площади их поверхностей Объёмы тел Векторы в пространстве. Действия над векторами. Скалярное произведение векторов
48	
49	
50	
51, 52	
53, 54	

● — **УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ (2 ч в неделю)** — ●

**10 класс**

На изучение тем по геометрии отводится 68 ч.

№ урока	Содержание учебного материала
<b>Введение. Аксиомы стереометрии и их следствия (5 ч)</b>	
1	Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии (пп. 1, 2) Некоторые следствия из аксиом (п. 3) Решение задач на применение аксиом стереометрии и их следствий. Самостоятельная работа № В.1 (20 мин)
2	
3—5	
<b>Глава I. Параллельность прямых и плоскостей (19 ч)</b>	
§ 1. Параллельность прямых, прямой и плоскости	
6	Параллельные прямые в пространстве. Параллельность трёх прямых (пп. 4, 5) Параллельность прямой и плоскости (п. 6) Повторение теории, решение задач на параллельность прямой и плоскости. Самостоятельная работа № 1.1 (15 мин)
7	
8—10	

№ урока	Содержание учебного материала
§ 2. Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми	
11 12  13—15	Скрещивающиеся прямые (п. 7) Углы с сонаправленными сторонами. Угол между прямыми (пп. 8, 9) Повторение теории, решение задач. Контрольная работа № 1.1 (20 мин)
§ 3. Параллельность плоскостей	
16, 17	Параллельные плоскости. Свойства параллельных плоскостей (пп. 10, 11)
§ 4. Тетраэдр и параллелепипед	
18, 19 20, 21  22 23, 24	Тетраэдр. Параллелепипед (пп. 12, 13) Изображение пространственных фигур (Приложение 1). Задачи на построение сечений (п. 14) Повторение теории, решение задач Контрольная работа № 1.2. Зачёт № 1 по теме «Параллельность в пространстве»
<b>Глава II. Перпендикулярность прямых и плоскостей (20 ч)</b>	
§ 1. Перпендикулярность прямой и плоскости	
25  26  27  28—30	Перпендикулярные прямые в пространстве. Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости (пп. 15, 16) Признак перпендикулярности прямой и плоскости (п. 17) Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости (п. 18) Решение задач на перпендикулярность прямой и плоскости. Самостоятельная работа № 2.1 (15 мин)
§ 2. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью	
31  32 33—36	Расстояние от точки до плоскости. Теорема о трёх перпендикулярах (пп. 19, 20) Угол между прямой и плоскостью (п. 21) Повторение теории, решение задач. Самостоятельная работа № 2.2 (15 мин)

№ урока	Содержание учебного материала
§ 3. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей	
37, 38 39, 40 41, 42 43, 44	Двугранный угол. Признак перпендикулярности двух плоскостей (пп. 22, 23) Прямоугольный параллелепипед (п. 24) Повторение теории, решение задач Контрольная работа № 2.1. Зачёт № 2 по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей»
<b>Глава III. Многогранники (16 ч)</b>	
§ 1. Понятие многогранника. Призма	
45—48	Понятие многогранника. Призма (пп. 27, 28, 30). Площадь прямоугольной проекции многоугольника. Пространственная теорема Пифагора (п. 31*). Самостоятельная работа № 3.1 (15—20 мин)
§ 2. Пирамида	
49—53	Пирамида. Правильная пирамида. Усечённая пирамида (пп. 32—34). Самостоятельная работа № 3.2 (15—20 мин)
§ 3. Правильные многогранники	
54—58  59, 60	Симметрия в пространстве. Понятие правильного многогранника. Элементы симметрии правильных многогранников (пп. 35—37). Теорема Эйлера (п. 29*) Контрольная работа № 3.1. Зачёт № 3 по теме «Многогранники».
<b>Заключительное повторение тем геометрии 10 класса (8 ч)</b>	
61, 62 63, 64 65—67  68	Аксиомы стереометрии и их следствия. Параллельность прямых и плоскостей Перпендикулярность прямых и плоскостей Многогранники. Площади боковых поверхностей призмы и пирамиды Заключительный урок-беседа по курсу геометрии 10 класса

## 11 класс

На изучение тем по геометрии отводится 68 ч.

№ урока	Содержание учебного материала
<b>Глава IV. Цилиндр, конус и шар (16 ч)</b>	
§ 1. Цилиндр	
1—3	Понятие цилиндра. Площадь поверхности цилиндра (пп. 38, 39). Самостоятельная работа № 4.1
§ 2. Конус	
4—6	Понятие конуса. Площадь поверхности конуса. Усечённый конус (пп. 40—42)
§ 3. Сфера	
7—10	Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости. Касательная плоскость к сфере. Площадь сферы (пп. 43—46) Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар. Сечения цилиндрической и конической поверхностей (пп. 50*, 51*) Контрольная работа № 4.1. Зачёт № 4 по теме «Цилиндр, конус и шар»
11—14	
15, 16	
<b>Глава V. Объёмы тел (17 ч)</b>	
§ 1. Объём прямоугольного параллелепипеда	
17—19	Понятие объёма. Объём прямоугольного параллелепипеда (пп. 52, 53). Самостоятельная работа № 5.1
§ 2. Объёмы прямой призмы и цилиндра	
20, 21	Объём прямой призмы. Объём цилиндра (пп. 54, 55)
§ 3. Объёмы наклонной призмы, пирамиды и конуса	
22—26	Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла. Объём наклонной призмы. Объём пирамиды (пп. 56—58). Самостоятельная работа № 5.2

№ урока	Содержание учебного материала
27, 28	Объём конуса (п. 59). Самостоятельная работа № 5.3
§ 4. Объём шара и площадь сферы	
29—31  32, 33	Объём шара. Объёмы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора. Площадь сферы (пп. 60—62*) Контрольная работа № 5.1. Зачёт № 5 по теме «Объёмы тел»
<b>Глава VI. Векторы в пространстве (7 ч)</b>	
§ 1. Понятие вектора в пространстве	
34	Понятие вектора. Равенство векторов (пп. 63, 64)
§ 2. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число	
35, 36	Сложение и вычитание векторов. Сумма нескольких векторов. Умножение вектора на число (пп. 65—67)
§ 3. Компланарные векторы	
37, 38  39 40	Компланарные векторы. Правило параллелепипеда. Разложение вектора по трём некопланарным векторам (пп. 68—70) Повторение теории, решение задач Зачёт № 6 по теме «Векторы в пространстве»
<b>Глава VII. Метод координат в пространстве. Движения (16 ч)</b>	
§ 1. Координаты точки и координаты вектора	
41  42, 43  44—46 47	Прямоугольная система координат в пространстве (п. 71) Координаты вектора (п. 72). Самостоятельная работа № 7.1. Связь между координатами векторов и координатами точек (п. 73) Простейшие задачи в координатах (п. 74). Самостоятельная работа № 7.2 Уравнение сферы (п. 75)

№ урока	Содержание учебного материала
§ 2. Скалярное произведение векторов	
48, 49	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов (п. 76, 77)
50, 51 52	Вычисление углов между прямыми и плоскостями (п. 78). Самостоятельная работа № 7.3 Уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости (п. 79*)
§ 3. Движения	
53, 54 55, 56	Центральная симметрия (п. 80). Осевая симметрия (п. 81). Зеркальная симметрия (п. 82). Параллельный перенос (п. 83) Контрольная работа № 7.1. Зачёт № 7 по теме «Метод координат в пространстве»
<b>Заключительное повторение при подготовке учащихся к итоговой аттестации по геометрии (12 ч)</b>	
57, 58 59 60 61, 62 63 64, 65 66 67, 68	Аксиомы стереометрии и их следствия. Параллельность прямых, прямой и плоскости. Скрещивающиеся прямые. Параллельность плоскостей Перпендикулярность прямой и плоскости. Теорема о трёх перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей Многогранники: параллелепипед, призма, пирамида, площади их поверхностей Цилиндр, конус и шар, площади их поверхностей Объёмы тел Векторы в пространстве. Действия над векторами. Скалярное произведение векторов Повторение теории и решение задач по всему курсу геометрии

### Урок № 1

#### Тема урока: Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии

##### Основные задачи урока

Познакомить учащихся с содержанием курса стереометрии, с некоторыми геометрическими телами, показать связь курса стереометрии с практической деятельностью людей, изучить три аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве.

##### Примерный план проведения урока

1. В начале урока нужно отметить, что школьный курс геометрии состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии. В планиметрии изучались свойства геометрических фигур на плоскости, в стереометрии изучаются свойства фигур в пространстве.

2. Основными фигурами в пространстве являются точка, прямая и плоскость. Мы имеем об этих фигурах наглядное представление, но определения этих фигур в геометрии не даются. Их свойства выражены в аксиомах, с тремя из которых предстоит познакомиться уже на первом уроке.

3. Наряду с точками, прямыми и плоскостями в стереометрии рассматриваются геометрические тела, изучаются их свойства, вычисляются площади их поверхностей и объёмы. Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы. На уроке можно показать модели геометрических тел: куба, параллелепипеда, пирамиды, цилиндра, конуса, шара и др.

4. При изучении геометрических фигур, в частности геометрических тел, пользуются их изображением на чертеже. Целесообразно рассмотреть примеры изображения плоских и пространственных фигур, в частности правильного треугольника, квадрата, куба, параллелепипеда, пирамиды.

5. В процессе урока можно использовать слайд 1.1 «Основные фигуры в пространстве». Изображённое на слайде учащимся полезно перенести в свои рабочие тетради. Желательно выделить в цвете отдельные элементы рисунков.

6. Опираясь на текст учебника, нужно рассмотреть аксиомы стереометрии  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ . При их обсуждении полезен слайд 1.2.

**Точка**



**Прямая**



**Плоскость**

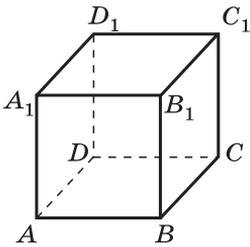


Прописные латинские буквы  $A, B, C, D, E, \dots$

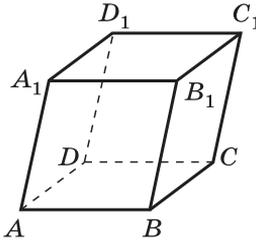
Строчные латинские буквы  $a, b, c, d, e, \dots$

Греческие буквы  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \pi, \omega, \dots$

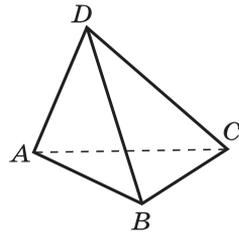
Приведите примеры прямых, проходящих через точки, принадлежащие указанным многогранникам:



**Куб**



**Параллелепипед**



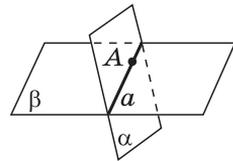
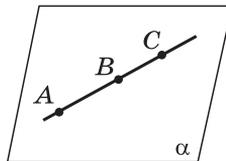
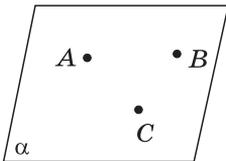
**Тетраэдр**

**Аксиомы стереометрии**

1.2

Сформулируйте аксиомы  $A_1, A_2, A_3$ .

Прокомментируйте их с помощью приведённых рисунков.



$A, B, C$  — произвольные точки, не лежащие на одной прямой. Через точки  $A, B, C$  проходит единственная плоскость  $\alpha$ .

$$\frac{A \in \alpha, B \in \alpha, C \in AB}{C \in \alpha}$$

$$\frac{A \in \alpha, A \in \beta}{\alpha \cap \beta = a, A \in a}$$

7. Для классной и домашней работы используются задачи 1—5. В процессе решения можно применять (но необязательно) краткую символическую запись  $A \in a$  (точка  $A$  принадлежит прямой  $a$ );  $A \in \alpha$  (точка  $A$  принадлежит плоскости  $\alpha$ );  $a \subset \alpha$  (прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$ );  $\alpha \cap \beta = a$  (плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ ).

**Задача 1** (рис. 8 учебника).

Решение.

а)  $PE \subset ADB$ ,  $MK \subset DBC$ , ...;

б)  $DK \cap ABC = C$ , ...;

г)  $ABC \cap DCB = BC$ , ... .

**Задача 3 г).** Верно ли, что через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна?

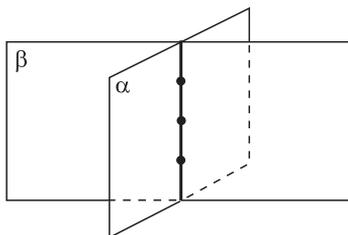


Рис. 1.1

Решение. Утверждение о том, что через любые три точки проходит плоскость, верно, но утверждение о единственности такой плоскости верно только тогда, когда заданные три точки не лежат на одной прямой. Если же заданные три точки лежат на одной прямой, то через эту прямую и, следовательно, через заданные три точки проходит бесконечное множество плоскостей (рис. 1.1).

## Урок № 2

### Тема урока: Некоторые следствия из аксиом

#### Основные задачи урока

Рассмотреть две теоремы, доказательство которых основано на изученных на первом уроке аксиомах стереометрии, показать их применение при решении задач.

#### Примерный план проведения урока

1. Повторить содержание аксиом  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ . Убедиться в том, что задачи домашней работы решены верно, со ссылкой на соответствующие аксиомы. С этой целью проверить решения некоторых из них.

2. Доказать первое следствие из аксиом: через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Разбирая доказательство этой теоремы, следует обратить внимание учащихся на два момента:

1) теорема содержит два утверждения, одно из которых говорит о существовании плоскости, проходящей через прямую и не лежащую на ней точку, а другое — о единственности такой плоскости;

2) доказательство первого утверждения опирается на аксиомы  $A_1$  и  $A_2$ , а доказательство второго утверждения — на аксиому  $A_1$ .

3. Доказать второе следствие из аксиом: через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

При доказательстве этой теоремы также необходимо обратить внимание учащихся на два момента:

1) данная теорема, как и предыдущая, содержит два утверждения: о существовании плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые, и о единственности такой плоскости;

2) доказательство теоремы опирается на аксиому  $A_2$  и на предыдущую теорему, причём используются оба утверждения, содержащиеся в первой теореме.

Полезно предложить учащимся самим указать те места в доказательстве данной теоремы, где используются первое и второе утверждения предыдущей теоремы.

4. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 6—9.

**Задача 6.** Три точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.

Решение. Если три данные точки лежат на одной прямой, то и отрезки, соединяющие попарно эти точки, принадлежат этой прямой и, следовательно, лежат в любой плоскости, проходящей через эту прямую. Если же данные точки (назовём их  $A$ ,  $B$  и  $C$ ) не лежат на одной прямой, то через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  по аксиоме  $A_1$  проходит единственная плоскость — обозначим её  $\alpha$ . Две точки каждого из отрезков  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$  лежат в плоскости  $\alpha$ , следовательно, по аксиоме  $A_2$  прямые  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$ , а значит, и отрезки  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$  лежат в плоскости  $\alpha$  (рис. 1.2).

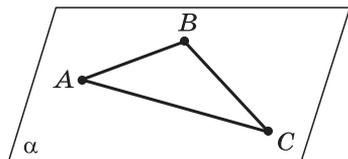


Рис. 1.2

**Задача 7.**

Дано:  $a \cap b = M$ ,  
 $c \cap a = A$ ,  
 $c \cap b = B$ ,  
 $M \notin c$ .

Доказать:  $a$ ,  $b$ ,  $c$  лежат в одной плоскости.

Легат ли в одной плоскости все прямые, проходящие через точку  $M$ ?

Решение. Согласно второму следствию пересекающиеся прямые  $a$  и  $b$  определяют некоторую плоскость  $\alpha$ . Точки  $A$  и  $B$  прямых  $a$  и  $b$  принадлежат плоскости  $\alpha$ , следовательно, по аксиоме  $A_2$  прямая  $c$  лежит в плоскости  $\alpha$  (рис. 1.3).

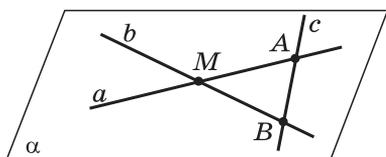


Рис. 1.3

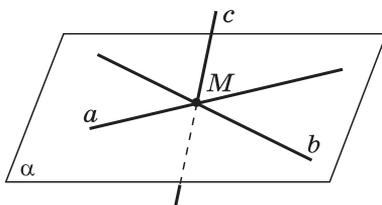


Рис. 1.4

Если прямая  $c$  пересекает прямые  $a$  и  $b$  в точке  $M$ , то прямая  $c$  может лежать и может не лежать в плоскости  $\alpha$  (рис. 1.4).

5. В процессе урока полезно провести фронтальную работу по вопросам слайда 1.3.

### 1.3

**Задача.**  $ABCD$  — ромб,  $O$  — точка пересечения его диагоналей,  $M$  — точка пространства, не лежащая в плоскости ромба. Точки  $A, D, O$  лежат на плоскости  $\alpha$ .

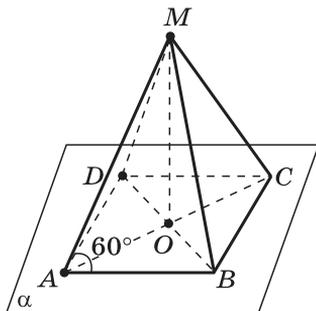
Дайте ответы на поставленные вопросы с необходимыми обоснованиями.

1. Лежат ли в плоскости  $\alpha$  точки  $B$  и  $C$ ?

2. Лежит ли в плоскости  $MOB$  точка  $D$ ?

3. Назовите линию пересечения плоскостей  $MOB$  и  $ADO$ .

4. Вычислите площадь ромба, если сторона его равна 4 см, а угол равен  $60^\circ$ . Предложите различные способы вычисления площади ромба.



#### Ответы на вопросы слайда 1.3

1. Так как  $D \in \alpha$ ,  $O \in \alpha$ , то по аксиоме  $A_2$   $DO \subset \alpha$ , а так как  $B \in DO$ , то  $B \in \alpha$ . Аналогично доказывается, что  $C \in \alpha$ .

2. Так как  $OB \subset MOB$ , а  $D \in OB$ , то  $D \in MOB$ .

3. Точки  $O$  и  $B$  принадлежат плоскостям  $MOB$  и  $ADO$ , поэтому линией пересечения этих плоскостей является прямая  $BO$ , или, что то же самое, прямая  $BD$ .

Полезно обратить внимание учащихся на тот факт, что если две плоскости имеют две общие точки, то они пересекаются по прямой, проходящей через эти точки.

4. Воспользуемся формулой для вычисления площади параллелограмма  $S = 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 8\sqrt{3}$  (см<sup>2</sup>).

## Уроки № 3—4

### Тема уроков: Повторение формулировок аксиом $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ , доказательств следствий из них, решение задач

#### Основные задачи уроков

Повторить формулировки аксиом, доказательства следствий из них, выработать навыки решения задач на применение аксиом стереометрии и их следствий.

#### Примерный план проведения уроков

1. Повторить доказательства следствий из аксиом и попутно формулировки самих аксиом.

2. Проверить выборочно решения задач из домашней работы.

3. Для классной и домашней работы использовать задачи 8—12.

**Задача 8.** Верно ли утверждение:

а) если две точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости;

б) если три точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости?

Решение.

а) Утверждение неверно. Приведём пример. Пусть окружность с диаметром  $AB$  лежит в плоскости  $\beta$ , которая пересекается с плоскостью  $\alpha$  по прямой  $AB$  (рис. 1.5). Тогда точки  $A$  и  $B$  окружности лежат в плоскости  $\alpha$ , но вся окружность не лежит в этой плоскости.

б) Утверждение верно. Пусть три данные точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  окружности лежат в плоскости  $\alpha$ . Так как любые три точки окружности не лежат на одной прямой, то согласно аксиоме  $A_1$  через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  проходит единственная плоскость  $\alpha$ . Окружность — плоская фигура, т. е. все её точки лежат в некоторой плоскости. Поскольку в этой же плоскости лежат точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , то эта

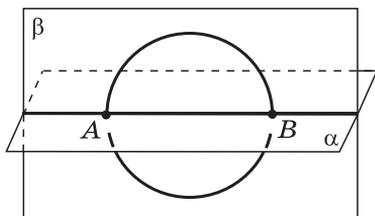


Рис. 1.5

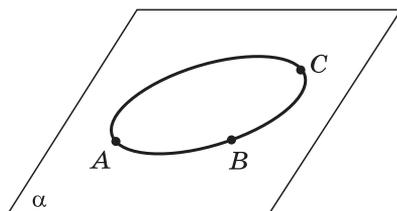


Рис. 1.6

плоскость совпадает с плоскостью  $\alpha$ . Итак, вся окружность лежит в той же плоскости  $\alpha$ , в которой лежат три её данные точки (рис. 1.6).

4. На уроках № 3—5 можно использовать дидактические материалы [1].

5. Полезно провести фронтальную работу с учащимися по слайдам 1.4 и 1.5.

## 1.4

**Задача.** Дан тетраэдр  $MABC$ , каждое ребро которого равно 6 см.  $D \in MB$ ,  $E \in MC$ ,  $F \in AB$ ,  $AF = FB$ ,  $P \in MA$ .

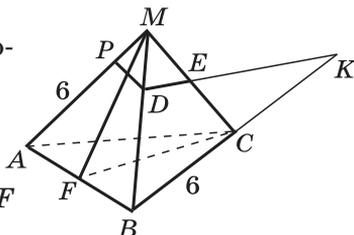
1. Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости:

- $MAB$  и  $MFC$ ;
- $MCF$  и  $ABC$ .

2. Найдите длину отрезка  $CF$  и площадь треугольника  $ABC$ .

3. а) Объясните, как построить точку пересечения прямой  $DE$  с плоскостью  $ABC$ .

б) Постройте точку пересечения прямой  $PD$  с плоскостью  $ABC$ .



## 1.5

**Задача.** Пересечение двух плоскостей.

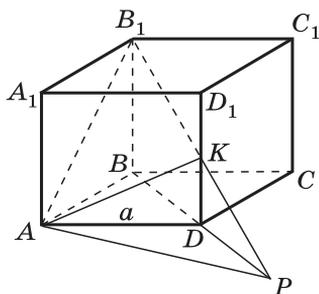
Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб,  $K \in DD_1$ ,  $DK = KD_1$ .

1. Объясните, как построить точку пересечения прямой  $B_1K$  с плоскостью  $ABC$ .

2. Объясните, как построить линию пересечения плоскостей  $AB_1K$  и  $ADD_1$ .

3. Объясните, как построить линию пересечения плоскостей  $AB_1K$  и  $ADC$ .

4. Вычислите длины отрезков  $AK$  и  $AB_1$ , если  $AD = a$ .



## Урок № 5

### Тема урока: Повторение теории, решение задач

#### Основные задачи урока

Закрепить усвоение вопросов теории в процессе решения задач, проверить уровень подготовленности учащихся путём проведения самостоятельной работы.

#### Примерный план проведения урока

1. Рассмотреть решения задач 13—15. В процессе их решения повторить соответствующие вопросы теории.

2. Использовать дидактические материалы [1].

**Задача 14.** Три прямые проходят через одну точку. Через каждые две из них проведена плоскость. Сколько всего проведено плоскостей?

Решение. Возможны два случая.

*Случай 1.* Прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$  лежат в одной плоскости. Тогда через них проходит одна плоскость (рис. 1.7).

*Случай 2.* Одна из трёх прямых (например,  $c$ ) не лежит в плоскости  $\alpha$ , определяемой двумя другими прямыми  $a$  и  $b$  (рис. 1.8). Тогда через три прямые проходят три различные плоскости, определяемые парами прямых  $a$  и  $b$ ,  $a$  и  $c$ ,  $b$  и  $c$ .

#### Самостоятельная работа № В.1

##### Вариант 1

1<sup>0</sup>. Даны четыре точки, из которых три лежат на одной прямой. Верно ли утверждение, что все четыре точки лежат в одной плоскости? Ответ обоснуйте.

2. а)<sup>0</sup> Докажите, что все вершины четырёхугольника  $ABCD$  лежат в одной плоскости, если его диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются. б) Вычислите площадь четырёхугольника, если  $AC \perp BD$ ,  $AC = 10$  см,  $BD = 12$  см.

##### Вариант 2

1<sup>0</sup>. Даны две пересекающиеся прямые. Верно ли утверждение, что все прямые, пересекающие данные, лежат в одной плоскости? Ответ обоснуйте.

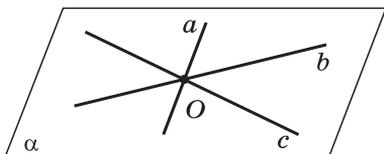


Рис. 1.7

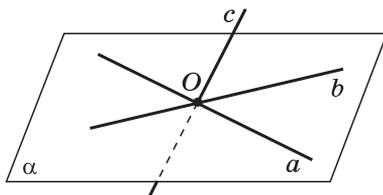


Рис. 1.8

2. а)<sup>0</sup> Дан прямоугольник  $ABCD$ ,  $O$  — точка пересечения его диагоналей. Известно, что точки  $A$ ,  $B$  и  $O$  лежат в плоскости  $\alpha$ . Докажите, что точки  $C$  и  $D$  также лежат в плоскости  $\alpha$ .

б) Вычислите площадь прямоугольника, если  $AC=8$  см,  $\angle AOB=60^\circ$ .

### Решения, ответы, указания

**Вариант 1.** 1<sup>0</sup>. Утверждение верно. Действительно, пусть  $A \in a$ ,  $B \in a$ ,  $C \in a$ ,  $D \notin a$  (рис. 1.9). Согласно первому следствию из аксиом через прямую  $a$  и точку  $D$  проходит единственная плоскость  $\alpha$ . Все четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  лежат в плоскости  $\alpha$ .

2. а)<sup>0</sup> Согласно второму следствию из аксиом пересекающиеся прямые  $AC$  и  $BD$  определяют некоторую плоскость  $\alpha$  (рис. 1.10). Прямая  $AC$  лежит в плоскости  $\alpha$ , следовательно, все её точки, в том числе  $A$  и  $C$ , принадлежат этой плоскости:  $A \in \alpha$ ,  $C \in \alpha$ . Аналогично имеем: так как  $BD \subset \alpha$ , то  $B \in \alpha$ ,  $D \in \alpha$ .

Итак, все вершины четырёхугольника лежат в плоскости  $\alpha$ .

б) Воспользуемся формулой  $S=0,5d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$ , где  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали четырёхугольника, а  $\alpha$  — угол между ними:

$$S = 0,5 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \sin 90^\circ = 60 \text{ (см}^2\text{)}.$$

**Вариант 2.** 1<sup>0</sup>. Утверждение неверно. См. решение задачи 7.

2. а)<sup>0</sup> См. решение задачи слайда 1.3.

б) Возможны различные способы решения задачи: 1) найти стороны прямоугольника; 2) использовать тот известный факт, что диагонали параллелограмма (прямоугольника) делят его на четыре равновеликих треугольника, и найти сначала площадь одного из треугольников; 3) использовать формулу  $S=0,5d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$ :

$$S = 0,5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = 16\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Для того чтобы получить оценку «5», ученик должен решить все задачи. За решение задач, отмеченных знаком <sup>0</sup>, ученику может быть выставлена оценка «3» или «4» в зависимости от качества выполнения заданий.

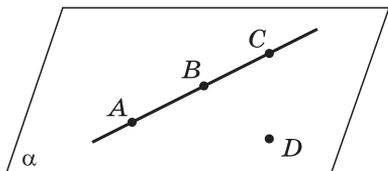


Рис. 1.9

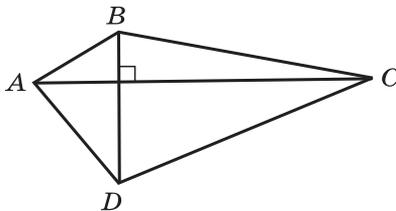


Рис. 1.10

**ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ  
И ПЛОСКОСТЕЙ**

**§ 1. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ,  
ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ**

**Урок № 6**

**Тема урока: Параллельные прямые в пространстве.  
Параллельность трёх прямых**

**Основные задачи урока**

Ввести понятие параллельных прямых в пространстве; доказать, что через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной; рассмотреть теорему о параллельности трёх прямых.

**Примерный план проведения урока**

1. Ввести понятие параллельных прямых в пространстве, используя рисунок 10 учебника.

2. Доказать теорему: через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Доказательство проводится в соответствии с текстом учебника и рисунком 11. При этом необходимо акцентировать внимание учащихся на двух моментах: 1) через данную прямую и точку проходит единственная плоскость (первое следствие из аксиом); 2) в этой плоскости, как известно из курса планиметрии, через данную точку проходит единственная прямая, параллельная данной.

3. Важную роль в доказательстве ряда теорем курса и в решении задач играет лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми: если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

Доказательство этой леммы не является простым. Оно проводится в два этапа: сначала доказано, что прямая  $b$  и плоскость  $\alpha$  имеют общую точку (точка  $N$  на рисунке 13, б), а затем, что прямая  $b$  и плоскость  $\alpha$  не имеют других общих точек. Это и означает, что прямая  $b$  пересекает плоскость  $\alpha$ .

С помощью фронтальной работы нужно убедиться в том, что доказательство леммы усвоено всеми учащимися.

4. Рассмотреть теорему: если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Необходимо напомнить учащимся, что аналогичное утверждение было доказано в курсе планиметрии для случая, когда все три прямые лежат в одной плоскости. В этом случае данное утверждение было непосредственным следствием из аксиомы параллельных прямых.

Более сложным для доказательства является случай, когда три прямые расположены в пространстве. Использование леммы позволяет дать простое доказательство теоремы, которое можно повторить на последующих уроках путём опроса наиболее подготовленных учащихся.

5. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 16—19.

### Задача 18 б).

Дано:  $A \in \alpha$ ,  
 $AB \not\subset \alpha$ ,  
 $C \in AB$ ,  
 $CC_1 \parallel BB_1$ ,  
 $C_1 \in \alpha$ ,  $B_1 \in \alpha$ ,  
 $AC : CB = 3 : 2$ ,  
 $BB_1 = 20$  см.

Найти  $CC_1$ .

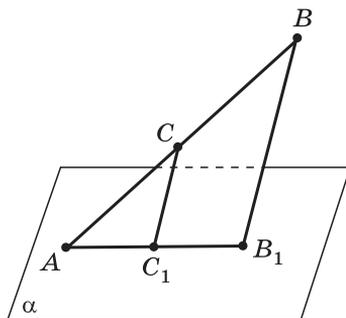


Рис. 1.11

Решение. Пересекающиеся прямые  $AB$  и  $BB_1$  определяют некоторую плоскость (второе следствие из аксиом). В этой плоскости через точку  $C$  проходит единственная прямая, параллельная прямой  $BB_1$ . Отсюда следует, что точки  $A$ ,  $C_1$  и  $B_1$  лежат на одной прямой (рис. 1.11).

Далее,  $\triangle ACC_1 \sim \triangle ABB_1$ , поэтому  $\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{AC}{AB}$ , т. е.  $\frac{CC_1}{20} = \frac{3}{5}$ , откуда  $CC_1 = 12$ .

Ответ:  $CC_1 = 12$  см.

## Урок № 7

### Тема урока: Параллельность прямой и плоскости

#### Основные задачи урока

Ввести понятие параллельных прямой и плоскости, изучить признак параллельности прямой и плоскости, а также утверждения 1<sup>0</sup>, 2<sup>0</sup>, сформулированные и доказан-

ные в п. 6, показать, как они применяются при решении задач.

### Примерный план проведения урока

1. Повторить теоретический материал предыдущего урока путём фронтального опроса учащихся.

2. Проверить выборочно решения задач из домашней работы, в случае необходимости внести исправления в решения.

3. В процессе изучения нового материала:

а) Рассмотреть три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве (рис. 5, а, б, 15, б из учебника).

б) Сформулировать определение параллельных прямой и плоскости. Использовать в качестве иллюстрации плоскости стен, пола и потолка классной комнаты и линии их пересечения.

в) Доказать теорему, выражающую признак параллельности прямой и плоскости.

Целесообразно вначале предложить учащимся дать какие-то свои доказательства теоремы и обсудить их предложения. Затем рассмотреть доказательство, приведённое в учебнике, и отметить эффективность использования леммы о пересечении плоскости параллельными прямыми.

Полезна символическая запись теоремы (рис. 1.12):

Дано:  $a \not\subset \alpha$ ,  
 $b \subset \alpha$ ,  
 $a \parallel b$ .

---

Доказать:  $a \parallel \alpha$ .

4. Рассмотреть утверждения 1<sup>0</sup>, 2<sup>0</sup> из учебника, из которых особенно важно первое утверждение, используемое при решении многих задач.

Символическая запись утверждения 1<sup>0</sup> (рис. 1.13):

Дано:  $a \parallel \alpha$ ,  
 $a \subset \beta$ ,  
 $\beta \cap \alpha = b$ .

---

Доказать:  $b \parallel a$ .

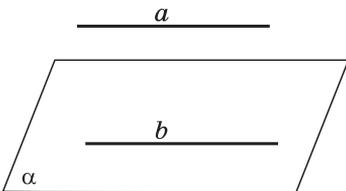


Рис. 1.12

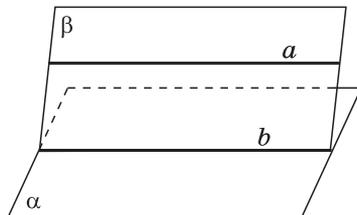


Рис. 1.13

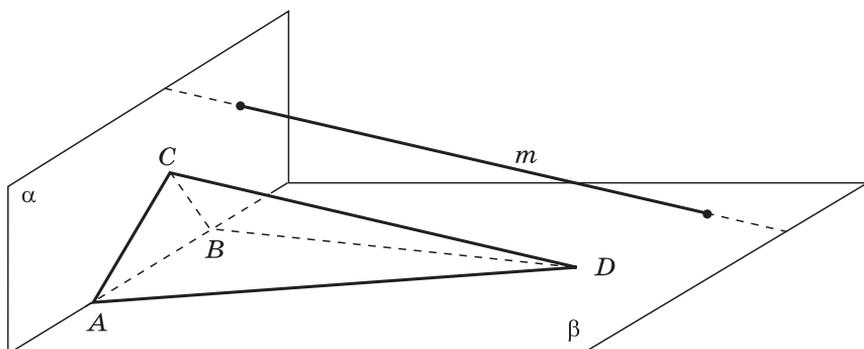


Рис. 1.14

Учащиеся должны знать формулировку этого утверждения и его доказательство. Следует обратить их внимание на то, что в доказательстве утверждения 2<sup>0</sup> снова используется лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми.

5. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 20—24.

**Задача 21.**

Дано:  $\triangle ABC \subset \alpha$ ,  
 $\triangle ABD \subset \beta$ ,  
 $m \parallel CD$ .

Доказать: прямая  $m$  пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ .

Решение. Так как по условию треугольник  $ABD$  не лежит в плоскости  $\alpha$ , то  $D \notin \alpha$ , а поскольку  $C \in \alpha$ , то прямая  $CD$  пересекает плоскость  $\alpha$  (в точке  $C$ ). Следовательно, прямая  $m$  также пересекает плоскость  $\alpha$  (по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми).

Аналогично доказывается, что прямая  $m$  пересекает плоскость  $\beta$  (рис. 1.14).

## Уроки № 8—10

### Тема уроков: Повторение теории, решение задач

Уроки № 8—10 необходимо посвятить повторению вопросов теории и решению задач.

1. На каждом из уроков № 8—9 полезно провести опрос учащихся по вопросам теории, изложенным в пп. 4—6.

2. В классной и домашней работе можно рассмотреть задачи 25—33.

**Задача 26.** Сторона  $AC$  треугольника  $ABC$  параллельна плоскости  $\alpha$ , а стороны  $AB$  и  $BC$  пересекаются с этой плоскостью в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $MBN$  подобны.

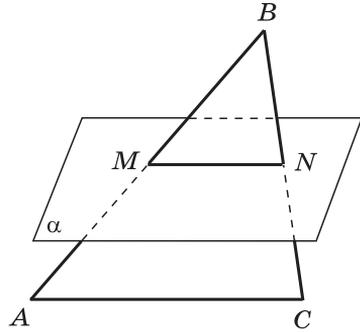


Рис. 1.15

**Решение.** Плоскость треугольника  $ABC$  проходит через прямую  $AC$ , параллельную плоскости  $\alpha$ , и пересекает эту плоскость по прямой  $MN$  (рис. 1.15), следовательно, линия  $MN$  пересечения плоскостей параллельна прямой  $AC$  (утверждение 1<sup>0</sup> п. 6). Отсюда следует, что  $\angle BAC = \angle BMN$  (как соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых  $AC$  и  $MN$  секущей  $AB$ ). Поэтому  $\triangle ABC \sim \triangle MBN$  по двум углам:  $\angle BAC = \angle BMN$ ,  $\angle B$  — общий.

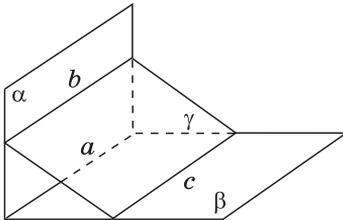
**Задача 33.** Докажите, что если три плоскости, не проходящие через одну прямую, попарно пересекаются, то прямые, по которым они пересекаются, либо параллельны, либо имеют общую точку.

**Решение.** Обозначим данные плоскости буквами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Пусть  $\alpha \cap \beta = a$ ,  $\alpha \cap \gamma = b$ ,  $\beta \cap \gamma = c$ .

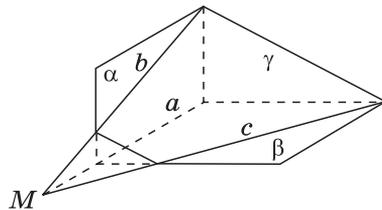
Так как по условию плоскости  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  не проходят через одну прямую, то прямая  $a$  не лежит в плоскости  $\gamma$ . Поэтому возможны два случая:

1)  $a \parallel \gamma$  (рис. 1.16, а). В этом случае плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $a$ , параллельную плоскости  $\gamma$ , и, следовательно, прямая  $b$ , по которой пересекаются плоскости  $\alpha$  и  $\gamma$ , параллельна прямой  $a$  (утверждение 1<sup>0</sup> п. 6):  $b \parallel a$ . Аналогично  $c \parallel a$ . Отсюда следует, что  $b \parallel c$ . Итак, в данном случае прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$  параллельны.

2) Прямая  $a$  пересекается с плоскостью  $\gamma$  в некоторой точке  $M$  (рис. 1.16, б). Поскольку все точки прямой  $a$  принадлежат как плоскости  $\alpha$ , так и плоскости  $\beta$ , то в



а)



б)

Рис. 1.16

этом случае точка  $M$  является общей точкой плоскостей  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Но все общие точки плоскостей  $\alpha$  и  $\gamma$  лежат на прямой  $b$ , а все общие точки плоскостей  $\beta$  и  $\gamma$  — на прямой  $c$ . Поэтому  $M$  — общая точка прямых  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Итак, в данном случае прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$  имеют общую точку.

3. Полезно использовать слайды 1.6 и 1.7 для выработки навыков решения типовых задач.

## 1.6

**Задача.** Параллельность прямой и плоскости.

Дано:  $AB \parallel \alpha$ ,  
 $AB = 7$ ,  
 $ABK \cap \alpha = CD$ ,  
 $AC = 6$ ,  $CK = 8$ .

1. Каково взаимное расположение прямых  $AB$  и  $CD$ ?

2. Найдите  $CD$ .

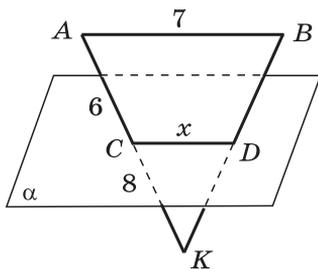
Решение.

1.  $AB \parallel CD$ .

2.  $\triangle AKB \sim \triangle CKD$ .

$$\frac{7}{x} = \frac{14}{8}, \quad x = 4.$$

Приведите необходимые обоснования.



## 1.7

**Задача.** Плоскость  $\alpha$  пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  соответственно в точках  $B_1$  и  $C_1$ . Известно, что  $BC \parallel \alpha$ ,  $AB : B_1B = 8 : 3$ ,  $AC = 16$  см.

1. Докажите, что  $B_1C_1 \parallel BC$ .

2. Найдите  $AC_1$ .

Решение.

*Способ 1*

1.  $BC \parallel \alpha$ ,  $ABC \cap \alpha = B_1C_1$ ;

$B_1C_1 \parallel BC$ .

2.  $AC_1 : C_1C = 5 : 3$ ,

$$5m + 3m = 16 \text{ см}, \quad m = 2 \text{ см},$$

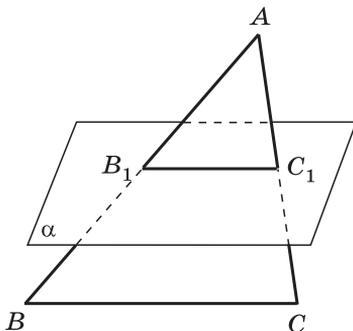
$$AC_1 = 5m, \quad AC_1 = 10 \text{ см}.$$

*Способ 2*

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}, \quad \frac{5}{8} = \frac{AC_1}{16 \text{ см}},$$

$$AC_1 = 10 \text{ см}.$$

Дайте обоснование решения.



4. На уроках № 8—9 можно использовать дидактические материалы [1] для проведения самостоятельных работ обучающего характера. Результаты работ обсуждаются на этих же уроках.

5. На уроке № 10 нужно провести самостоятельную работу № 1.1 контролирующего характера.

### Самостоятельная работа № 1.1

#### Вариант 1

Дан треугольник  $ABC$ ,  $E \in AB$ ,  $K \in BC$ ,  $BE:EA = BK:KC = 2:5$ . Через прямую  $AC$  проходит плоскость  $\alpha$ , не совпадающая с плоскостью треугольника  $ABC$ .

а) Докажите, что  $EK \parallel \alpha$ .

б) Найдите длину отрезка  $AC$ , если  $EK = 4$  см.

#### Вариант 2

Дан треугольник  $ABC$ ,  $M \in AB$ ,  $K \in BC$ ,  $BM:MA = 3:4$ . Через прямую  $MK$  проходит плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$ .

а) Докажите, что  $BC:CK = 7:3$ .

б) Найдите длину отрезка  $MK$ , если  $AC = 14$  см.

**Указание.** Вариант 1. Использовать признак подобия треугольников и признак параллельности прямой и плоскости.  $AC = 10$  см.

Вариант 2. Использовать утверждение 1° из п. 6 и подобие треугольников.  $MK = 6$  см.

## § 2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

### Урок № 11

#### Тема урока: Скрещивающиеся прямые

#### Основные задачи урока

Ввести понятие скрещивающихся прямых; доказать теорему, выражающую признак скрещивающихся прямых; доказать, что через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

### Примерный план проведения урока

1. Объяснить, используя рисунок 19 учебника и другие примеры, что две прямые могут не лежать в одной плоскости. Сформулировать определение скрещивающихся прямых.

2. Доказать теорему, выражающую признак скрещивающихся прямых. При доказательстве теоремы и решении задач можно использовать следующее обозначение для скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$ :  $a \div b$ .

Символическая запись теоремы (рис. 1.17):

$$\begin{array}{l} \text{Дано: } a \subset \alpha, \\ \quad b \cap \alpha = C, \\ \quad C \notin a. \end{array}$$

---

Доказать:  $a \div b$ .

После доказательства теоремы обратить внимание учащихся на то, что возможны три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве: прямые пересекаются, прямые параллельны, прямые скрещиваются (рис. 21 учебника).

3. Доказать теорему: через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Целесообразно подробно обсудить доказательство этой теоремы, приведённое в учебнике (рис. 1.18).

Прямые  $a$  и  $b$  по условию являются скрещивающимися. Через произвольную точку  $A$  прямой  $a$  проводим прямую  $b_1$ , параллельную  $b$ .

Прямые  $a$  и  $b_1$  определяют плоскость  $\alpha$ . По признаку параллельности прямой и плоскости  $b \parallel \alpha$ .

Итак, через прямую  $a$  проходит плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $b$ .

На первый взгляд может показаться, что таких плоскостей бесконечно много, так как точка  $A$  на прямой  $a$  была выбрана произвольно.

Необходимо доказать, что  $\alpha$  — единственная плоскость, проходящая через прямую  $a$  и параллельная прямой  $b$ .

В самом деле, любая другая плоскость, проходящая через прямую  $a$ , пересекается с прямой  $b_1$ , а следо-

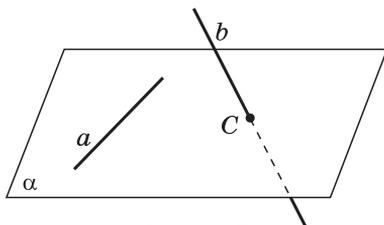


Рис. 1.17

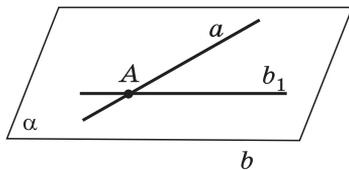


Рис. 1.18

вательно, пересекается и с параллельной ей прямой  $b$ . Это и означает, что  $\alpha$  — единственная плоскость, проходящая через прямую  $a$  и параллельная прямой  $b$ .

В связи с этим полезно заметить, что все прямые, проведённые через все возможные точки прямой  $a$  параллельно прямой  $b$ , лежат в плоскости  $\alpha$ .

Можно отметить также, что в доказательстве теоремы снова использовалась лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми.

4. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 34—38.

**Задача 34.** Точка  $D$  не лежит в плоскости треугольника  $ABC$ . Точки  $M$ ,  $N$  и  $P$  — середины отрезков  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$  соответственно. Точка  $K$  лежит на отрезке  $BN$ . Выясните взаимное расположение прямых: а)  $\overline{ND}$  и  $AB$ ; б)  $PK$  и  $BC$ ; в)  $MN$  и  $AB$ ; г)  $MP$  и  $AC$ ; д)  $KN$  и  $AC$ ; е)  $MD$  и  $BC$ .

Учащиеся должны уметь дать краткие обоснования, например:

г)  $MP \parallel AC$  по свойству средней линии треугольника;

д)  $KN \perp AC$  по признаку скрещивающихся прямых:  $AC \subset ABC$ , прямая  $KN$  пересекает плоскость  $ABC$  в точке  $B$  и  $B \notin AC$  (рис. 1.19).

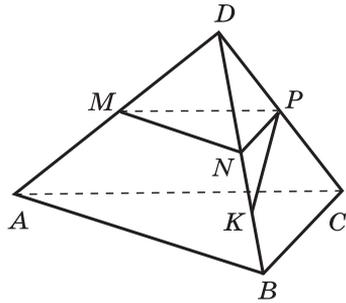


Рис. 1.19

**Задача 38.** Для решения задачи можно использовать слайд 1.8 и обсудить устные ответы учащихся.

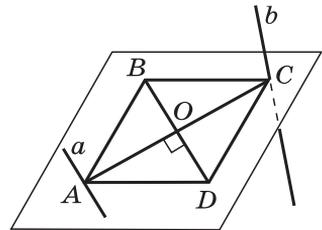
## 1.8

**Задача.** Через вершину  $A$  ромба  $ABCD$  проведена прямая  $a$ , параллельная диагонали  $BD$ , а через вершину  $C$  — прямая  $b$ , не лежащая в плоскости ромба.

Докажите, что:

а) прямые  $a$  и  $CD$  пересекаются;

б) прямые  $a$  и  $b$  являются скрещивающимися.



## Урок № 12

### Тема урока: Углы с сонаправленными сторонами. Угол между прямыми

#### Основные задачи урока

Доказать теорему об углах с сонаправленными сторонами; ввести понятие угла между прямыми и рассмотреть задачи, в которых используется это понятие.

#### Примерный план проведения урока

1. Ввести понятие сонаправленных лучей и углов с сонаправленными сторонами.

2. Доказать теорему: если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.

3. Ввести понятие угла между пересекающимися прямыми (рис. 26 учебника).

4. Ввести понятие угла между скрещивающимися прямыми и доказать, что он не зависит от выбора точки, через которую проводятся прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым.

Важно подчеркнуть, что угол  $\alpha$  между прямыми (пересекающимися или скрещивающимися) изменяется в промежутке  $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ .

Для усвоения понятия угла между скрещивающимися прямыми можно использовать задачу 44.

**Задача 44.** Прямые  $OB$  и  $CD$  параллельны, а прямые  $OA$  и  $CD$  скрещивающиеся. Найдите угол между прямыми  $OA$  и  $CD$ , если: а)  $\angle AOB = 40^\circ$ ; б)  $\angle AOB = 135^\circ$ ; в)  $\angle AOB = 90^\circ$ .

Решение.

а) Угол между прямыми  $OA$  и  $CD$  равен  $40^\circ$  (рис. 1.20).

б) Угол между прямыми  $OA$  и  $CD$  равен  $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$  (рис. 1.21).

в) Угол между прямыми  $OA$  и  $CD$  равен  $90^\circ$  (рис. 1.22).

Ответ: а)  $40^\circ$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $90^\circ$ .

5. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 39—42, 44.

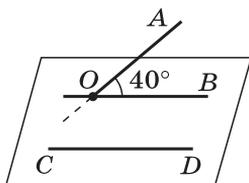


Рис. 1.20

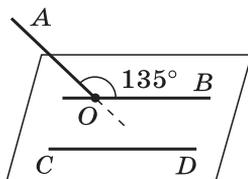


Рис. 1.21

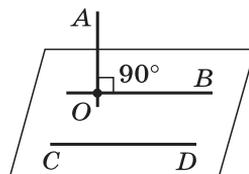


Рис. 1.22

## Уроки № 13—15

### Тема уроков: Повторение теории, решение задач

Уроки № 13—15 необходимо посвятить повторению вопросов теории и решению задач. Можно использовать задачи 43, 45—47, дополнительные задачи 88, 93, 94, 97 и др.

Для решения задачи 43 можно использовать слайд 1.9. В рабочих тетрадях учащиеся делают записи на основе этого слайда.

1.9

**Задача.** Дан четырёхугольник  $ABCD$ , вершины которого не лежат в одной плоскости (пространственный четырёхугольник). Докажите, что середины сторон пространственного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

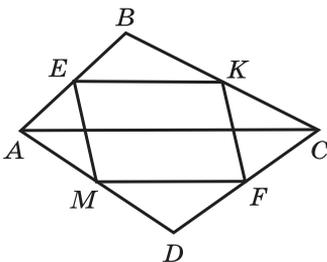
**Доказательство.**

1.  $EK$  — средняя линия треугольника  $ABC$ , поэтому  $EK \parallel AC$  и  $EK = \frac{1}{2}AC$ .

2.  $MF$  — средняя линия треугольника  $ADC$ , поэтому  $MF \parallel AC$  и  $MF = \frac{1}{2}AC$ .

3.  $EK \parallel MF$  и  $EK = MF$ .

4. Вершины четырёхугольника  $MEKF$  лежат в одной плоскости, определяемой параллельными прямыми  $EK$  и  $MF$ , его противоположные стороны  $EK$  и  $MF$  параллельны и равны, поэтому  $MEKF$  — параллелограмм.



**Задача 47.** В пространственном четырёхугольнике  $ABCD$  стороны  $AB$  и  $CD$  равны. Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  образуют равные углы с прямой, проходящей через середины отрезков  $BC$  и  $AD$ .

**Решение.**  $ABCD$  — заданный четырёхугольник,  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $BC$  и  $AD$  (рис. 1.23).

В плоскости треугольника  $ABC$  через точку  $M$  проводим прямую, параллельную прямой  $AB$ . Тогда точка  $K$  — середина отрезка  $AC$ . Угол между прямыми  $MN$  и  $AB$  равен  $\angle KMN$ . В плоскости треугольника  $ADC$  через точку  $N$  проводим прямую, параллельную  $CD$ . Эта пря-

мая пройдёт через середину стороны  $AC$ , т. е. через точку  $K$ . Угол между прямыми  $MN$  и  $DC$  равен  $\angle KNM$ .

Так как  $AB = CD$  по условию, то  $KM = KN = \frac{AB}{2}$  по свойству средней линии треугольника, т. е. треугольник  $KMN$  равнобедренный, и, следовательно,  $\angle KMN = \angle KNM$ .

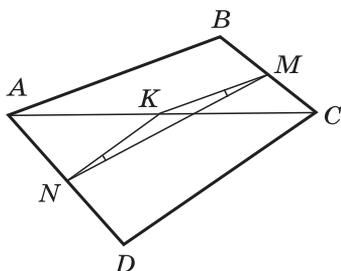


Рис. 1.23

На уроке № 15 нужно провести контрольную работу № 1.1.

### Контрольная работа № 1.1

#### Вариант 1

1<sup>0</sup>. Основание  $AD$  трапеции  $ABCD$  лежит в плоскости  $\alpha$ . Через вершины  $B$  и  $C$  трапеции проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость  $\alpha$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно.

- а) Каково взаимное расположение прямых  $EF$  и  $AB$ ?
- б) Чему равен угол между прямыми  $EF$  и  $AB$ , если  $\angle ABC = 150^\circ$ ? Ответ обоснуйте.

2. Дан пространственный четырёхугольник  $ABCD$ , в котором диагонали  $AC$  и  $BD$  равны. Середины сторон этого четырёхугольника соединены последовательно отрезками.

- а)<sup>0</sup> Выполните рисунок к задаче.
- б) Докажите, что полученный четырёхугольник — ромб.

#### Вариант 2

1<sup>0</sup>. Треугольники  $ABC$  и  $ADC$  лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону  $AC$ . Точка  $P$  — середина стороны  $AD$ , точка  $K$  — середина  $DC$ .

- а) Каково взаимное расположение прямых  $PK$  и  $AB$ ?
- б) Чему равен угол между прямыми  $PK$  и  $AB$ , если  $\angle ABC = 40^\circ$  и  $\angle BCA = 80^\circ$ ? Ответ обоснуйте.

2. Дан пространственный четырёхугольник  $ABCD$ ,  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно,  $E \in CD$ ,  $K \in DA$ ,  $DE : EC = 1 : 2$ ,  $DK : KA = 1 : 2$ .

- а)<sup>0</sup> Выполните рисунок к задаче.
- б) Докажите, что четырёхугольник  $MNEK$  — трапеция.

## § 3. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

### Урок № 16

#### Тема урока: Параллельные плоскости. Свойства параллельных плоскостей

##### Основные задачи урока

Ввести понятие параллельных плоскостей; доказать теорему, выражающую признак параллельности двух плоскостей; изучить свойства  $1^0$  и  $2^0$  параллельных плоскостей.

##### Примерный план проведения урока

1. Используя текст учебника и рисунок 28, отметить, что возможны два случая взаимного расположения двух плоскостей: плоскости либо пересекаются по прямой, либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки. Затем дать определение параллельных плоскостей.

2. Доказать теорему, выражающую признак параллельности двух плоскостей. Обратить внимание учащихся на то, что теорема доказывается методом от противного: предполагаем, что плоскости не параллельны, т. е. пересекаются по некоторой прямой  $c$ . На основе этого предположения приходим к противоречию с теоремой о параллельных прямых из п. 4.

Необходимо добиться того, чтобы учащиеся могли провести доказательство теоремы. Полезно предложить им изобразить на рисунке предполагаемую линию  $c$  пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 1.24).

3. Изучить свойства  $1^0$  и  $2^0$  параллельных плоскостей. Эта работа может быть выполнена на основе фронтальной беседы с использованием рисунков 30 и 31 учебника.

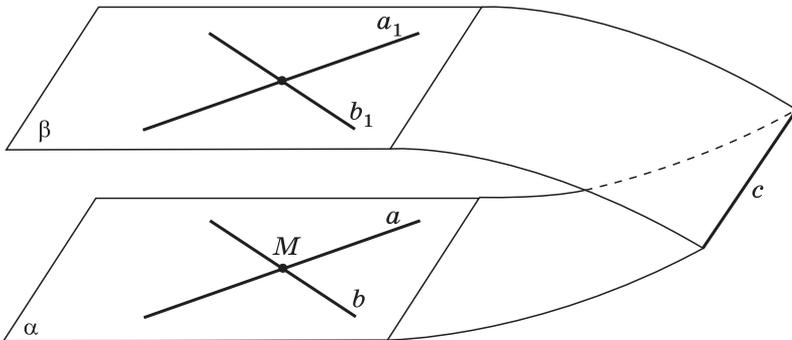


Рис. 1.24

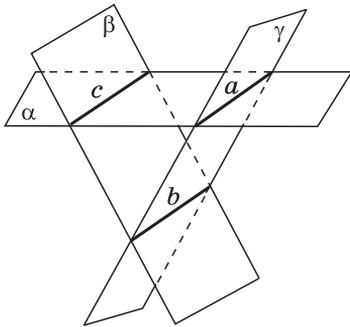


Рис. 1.25

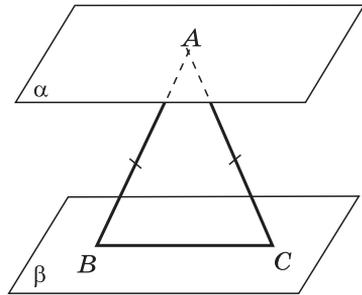


Рис. 1.26

Перед учащимися, проявляющими повышенный интерес к математике, можно поставить вопрос: верны ли утверждения, обратные утверждениям  $1^0$  и  $2^0$  из п. 11? А именно: верны ли следующие утверждения?

1) Если линии пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  третьей плоскостью параллельны, то плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны (утверждение, обратное  $1^0$ ).

2) Если отрезки двух прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны, то эти отрезки параллельны (утверждение, обратное  $2^0$ ). Отметим, что вопрос о справедливости этого утверждения содержится в разделе «Вопросы к главе I» (вопрос 13), где он сформулирован в несколько иной форме.

Ответ на вопрос о справедливости утверждений  $1^0$  и  $2^0$  отрицательный — эти утверждения неверны. Рисунок 1.25 показывает, что неверным является утверждение  $1^0$ . На этом рисунке плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $c$ , а плоскость  $\gamma$ , параллельная прямой  $c$ , пересекается с плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно по прямым  $a$  и  $b$ . Прямые  $a$  и  $b$  параллельны (это следует из того, что каждая из них согласно утверждению  $1^0$  из п. 6 параллельна прямой  $c$ ), но плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  не параллельны. Таким образом, утверждение  $1^0$  неверно.

Рисунок 1.26 показывает, что неверным является утверждение  $2^0$ . На этом рисунке плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны, вершина  $A$  равнобедренного треугольника  $ABC$  лежит в плоскости  $\alpha$ , а основание  $BC$  — в плоскости  $\beta$ . Таким образом, равные отрезки  $AB$  и  $AC$  заключены между параллельными плоскостями, но эти отрезки не параллельны. Таким образом, утверждение  $2^0$  неверно.

4. Для классной работы можно использовать задачи 48, 54а, б, 63а и др.

Для домашней работы — задачи 50, 55, 58, 63б и др.

**Задача 54.** Точка  $B$  не лежит в плоскости треугольника  $ADC$ , точки  $M$ ,  $N$  и  $P$  — середины отрезков  $BA$ ,  $BC$  и  $BD$  соответственно.

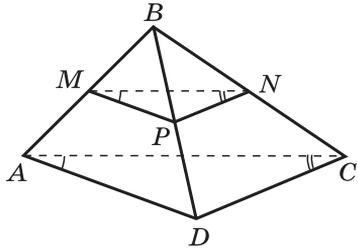


Рис. 1.27

а) Докажите, что плоскости  $MNP$  и  $ADC$  параллельны.

б) Найдите площадь треугольника  $MNP$ , если площадь треугольника  $ADC$  равна  $48 \text{ см}^2$ .

Решение.

а)  $MP \parallel AD$ ,  $PN \parallel DC$ ,  $NM \parallel CA$  согласно свойству средней линии треугольника (рис. 1.27). Следовательно,  $MNP \parallel ADC$  (по признаку параллельности двух плоскостей).

б)  $\angle PMN = \angle DAC$ ,  $\angle MNP = \angle ACD$  как углы с сонаправленными сторонами, поэтому  $\triangle MNP \sim \triangle ACD$  (по первому признаку подобия треугольников).

$\frac{S_{MNP}}{S_{ACD}} = \left(\frac{MN}{AC}\right)^2$  (по теореме об отношении площадей подобных треугольников).

$\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$  (согласно свойству средней линии треугольника).

Следовательно,  $\frac{S_{MNP}}{48 \text{ см}^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ,  $S_{MNP} = 12 \text{ см}^2$ .

Ответ:  $12 \text{ см}^2$ .

## Урок № 17

### Тема урока: Повторение вопросов теории и решение задач на параллельность плоскостей

#### Основные задачи урока

Повторить формулировки утверждений о параллельных плоскостях, некоторые доказательства, рассмотреть задачи на параллельность плоскостей.

#### Примерный план проведения урока

1. Повторить вопросы теории. Путем опроса учащихся повторить доказательство теоремы о признаке параллельности двух плоскостей.

2. Решить задачи 63б, 65.

3. Можно использовать дидактические материалы [1].

4. Для подведения итога изучения данной темы можно использовать слайд 1.10.

**Задача.** Не лежащие в одной плоскости прямые  $MK$ ,  $ME$  и  $MF$  пересекают плоскость  $\alpha$  в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а параллельную ей плоскость  $\beta$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ .

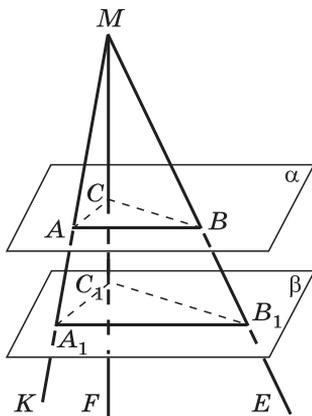
1. Докажите, что:

а) соответственные стороны треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  параллельны;

б) соответственные углы треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны;

в) треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны.

2. Найдите площадь треугольника  $A_1B_1C_1$ , если  $MA : AA_1 = 2 : 1$ ,  $S_{ABC} = 4 \text{ см}^2$ .



## § 4. ТЕТРАЭДР И ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

### Урок № 18

#### Тема урока: Тетраэдр

##### Основные задачи урока

Ввести понятие тетраэдра; рассмотреть задачи, связанные с тетраэдром.

##### Примерный план проведения урока

1. Обратить внимание учащихся на то, что при рассмотрении поверхностей и тел в пространстве под многоугольником понимается часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной без самопересечений (см. рис. 33 учебника).

2. Ввести понятие тетраэдра, его элементов: грани, рёбра, вершины, противоположные рёбра, основания, боковые грани (см. рис. 34, 35 учебника). Объяснить учащимся, что изображением тетраэдра является его параллельная проекция на плоскость (Приложение 1).

3. Рассмотреть простейшие задачи на построение сечений тетраэдра.

4. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 66—73.

**Задача 69.** Через середины рёбер  $AB$  и  $BC$  тетраэдра  $SABC$  проведена плоскость параллельно ребру  $SB$ . Докажите, что эта плоскость пересекает грани  $SAB$  и  $SBC$  по параллельным прямым.

**Решение.**

Обозначим секущую плоскость буквой  $\alpha$ , середины рёбер  $AB$  и  $BC$  буквами  $M$  и  $N$ .

Пусть плоскость  $\alpha$  пересекает грань  $SAB$  по отрезку  $MK$ , а грань  $SBC$  по отрезку  $NE$  (рис. 1.28). Докажем, что  $MK \parallel NE$ .

Плоскость  $SAB$  проходит через прямую  $SB$ , параллельную плоскости  $\alpha$  (по условию), и пересекает плоскость  $\alpha$  по прямой  $MK$ . Отсюда согласно утверждению 1<sup>0</sup> из п. 6 следует, что  $MK \parallel SB$ .

Аналогично доказывается, что  $NE \parallel SB$ .

Следовательно,  $MK \parallel NE$  (по теореме о параллельности трёх прямых, п. 5).

**Задача 73.** В тетраэдре  $ABCD$  точки  $M$ ,  $N$  и  $P$  являются серединами рёбер  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ ,  $AC = 10$  см,  $BD = 12$  см. Докажите, что плоскость  $MNP$  проходит через середину  $K$  ребра  $AD$ , и найдите периметр четырёхугольника, полученного при пересечении тетраэдра плоскостью  $MNP$ .

**Решение.**

Секущая плоскость  $MNP$  и плоскость грани  $ABC$  имеют две общие точки  $M$  и  $N$ , следовательно, они пересекаются по прямой  $MN$ , проходящей через эти точки (рис. 1.29).

Отрезок  $MN$  — средняя линия треугольника  $ABC$ , поэтому  $MN \parallel AC$ . Отсюда следует, что  $MN \parallel ACD$  (по признаку параллельности прямой и плоскости).

Таким образом, секущая плоскость  $MNP$  проходит через прямую  $MN$ , параллельную плоскости  $ACD$ . Следовательно, линия пересечения плоскостей  $MNP$  и  $ACD$  параллельна прямой  $MN$  (утверждение 1<sup>0</sup> из п. 6). Пусть эта линия пересекается с ребром  $AD$  в точке  $K$ .

Так как  $PK \parallel MN$  и  $MN \parallel AC$ , то  $PK \parallel AC$ , а так как точка  $P$  — середина отрезка  $CD$ , то отрезок  $PK$  — средняя

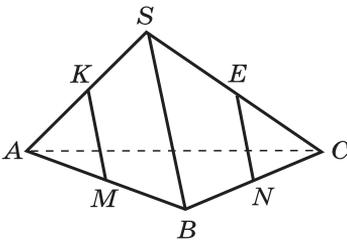


Рис. 1.28

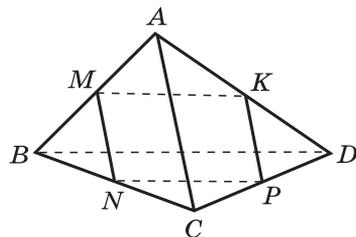


Рис. 1.29

линия треугольника  $ACD$ , т. е. точка  $K$  — середина ребра  $AD$ .

$MN = PK = \frac{1}{2}AC = 5$  см. Отрезки  $NP$  и  $MK$  — средние линии треугольников  $CBD$  и  $ABD$ , поэтому  $NP = MK = \frac{1}{2}BD = 6$  см. Периметр четырёхугольника  $MNPK$  равен  $2 \cdot (5 + 6)$  см = 22 см.

Ответ: 22 см.

## Урок № 19

### Тема урока: Параллелепипед

#### Основные задачи урока

Ввести понятие параллелепипеда, рассмотреть его свойства  $1^0$  и  $2^0$  (п. 13); решить задачи на применение свойств параллелепипеда.

#### Примерный план проведения урока

1. Используя текст учебника, ввести понятие параллелепипеда (см. рис. 36, а).

2. Изучить названия элементов параллелепипеда: грани, рёбра, вершины, смежные грани, противоположные грани, противоположные вершины, диагонали, основание, боковые грани, боковые рёбра.

3. Доказать утверждение  $1^0$ : противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

Следует обратить внимание учащихся на то, что в ходе доказательства используются два известных факта: признак параллельности двух плоскостей и равенство параллелограммов по двум смежным сторонам и углу между ними.

4. Доказать утверждение  $2^0$ : диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

5. Для формирования и развития у учащихся пространственных представлений полезно спроектировать на экран (или классную доску) каркасные модели тетраэдра и параллелепипеда и объяснить учащимся, как используются свойства параллельного проектирования при изображении этих фигур.

6. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 76—78, вопрос 15 и другие вопросы из раздела «Вопросы к главе I», дополнительные задачи к главе I.

**Задача 77.** Сумма всех рёбер параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равна 120 см. Найдите каждое ребро параллелепипеда, если известно, что  $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$ ,  $\frac{BC}{BB_1} = \frac{5}{6}$ .

**Решение.** Пусть  $AB = 4k$ , тогда  $BC = 5k$ ,  $BB_1 = 6k$ . По условию  $4(4k + 5k + 6k) = 120$  см, т. е.  $15k = 30$  см, откуда  $k = 2$  см. Рёбра параллелепипеда равны 8 см, 10 см и 12 см (рис. 1.30).

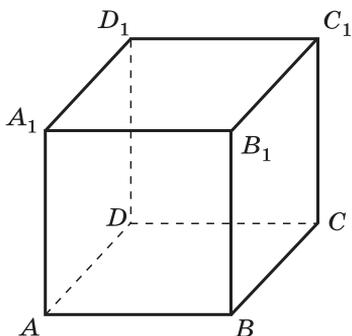


Рис. 1.30

## Уроки № 20—21

### Тема уроков: Задачи на построение сечений

#### Основная задача уроков

Выработать навыки решения задач на построение сечений тетраэдра и параллелепипеда.

#### Примерный план проведения урока

1. Используя текст учебника, ввести понятие секущей плоскости тетраэдра (параллелепипеда).

2. С помощью рисунков 38 и 39,  $a$  —  $b$  выяснить, какое число сторон может иметь сечение тетраэдра и параллелепипеда.

Обратить особое внимание учащихся на тот факт, что если секущая плоскость пересекает две противоположные грани параллелепипеда по каким-то отрезкам, то эти отрезки параллельны. Следует обосновать это утверждение: плоскости противоположных граней параллелепипеда параллельны, поэтому согласно утверждению 1<sup>0</sup> из п. 11 секущая плоскость пересекает их по параллельным прямым.

3. Обсудить устно решения задач 1, 2, 3, приведённые в учебнике.

В связи с необходимостью проводить постоянную работу по развитию устной речи учащихся следует требовать от них не только построения сечений в рассматриваемых задачах, но и устного рассказа о ходе построения с соответствующими обоснованиями.

Для краткости записи решений можно использовать известную символику.

Более сложные задачи на построение сечений тетраэдра и параллелепипеда, когда данные точки, через которые

проводится сечение, лежат внутри граней, могут быть рассмотрены на факультативных занятиях и спецкурсах.

Для классной и домашней работы можно использовать задачи 74, 75, 79—87, дополнительные задачи к главе I.

**Задача 105.** Изобразите тетраэдр  $DABC$  и отметьте точки  $M$  и  $N$  на рёбрах  $BD$  и  $CD$  и внутреннюю точку  $K$  грани  $ABC$ . Постройте сечение тетраэдра плоскостью  $MNK$ .

**Решение.** Обозначим секущую плоскость буквой  $\alpha$ . Тогда  $M \in \alpha$ ,  $N \in \alpha$ ,  $M \in CDB$ ,  $N \in CDB$ ,  $\alpha \cap CDB = MN$ .

Возможны два случая: 1<sup>0</sup>)  $MN \cap BC = P$ ; 2<sup>0</sup>)  $MN \parallel BC$ . Рассмотрим их отдельно.

1<sup>0</sup>) Проводим прямую  $MN$ .  $P \in \alpha$ ,  $K \in \alpha$ ,  $P \in ABC$ ,  $K \in ABC$ ,  $\alpha \cap ABC = PK$ . Проводим прямую  $PK$ . Пусть она пересекает стороны  $AC$  и  $AB$  в точках  $E$  и  $F$ . Проводим отрезки  $NE$  и  $MF$ . Искомое сечение — четырёхугольник  $MNEF$  построено (рис. 1.31).

2<sup>0</sup>) Через точку  $K$  проводим  $EF \parallel BC$ . Проводим отрезки  $NE$  и  $MF$ . Искомое сечение — четырёхугольник  $MNEF$  построено.

**Задача 85.** Изобразите параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и постройте его сечение плоскостью  $BKL$ , где  $K$  — середина ребра  $AA_1$ , а  $L$  — середина  $CC_1$ . Докажите, что построенное сечение — параллелограмм.

**Решение.** Проведём отрезок  $KL$ . Согласно аксиоме  $A_2$  он лежит в плоскости сечения.

Так как точки  $K$  и  $L$  — середины боковых рёбер, то отрезок  $KL$  проходит через середину диагонали  $AC_1$ , а поэтому согласно свойству 2<sup>0</sup> параллелепипеда (п. 13) он проходит через середину диагонали  $BD_1$  (точка  $O$  на рисунке 1.32).

$B \in \alpha$ ,  $O \in \alpha$ , следовательно,  $BD_1 \subset \alpha$ . Искомое сечение — четырёхугольник  $BLD_1K$ . Так как его диагонали  $KL$  и  $BD_1$  точкой пересечения делятся пополам, то четырёхугольник  $BLD_1K$  — параллелограмм.

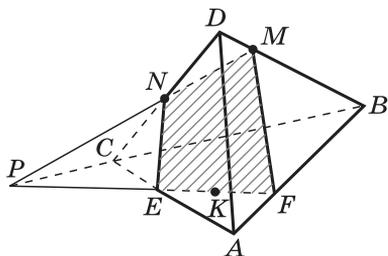


Рис. 1.31

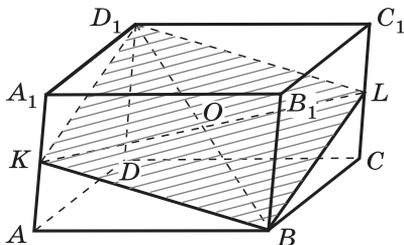


Рис. 1.32

4. На уроках № 20—21 можно использовать слайды 1.11—1.14.

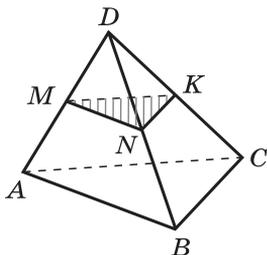
**Сечение тетраэдра плоскостью**

**1.11**

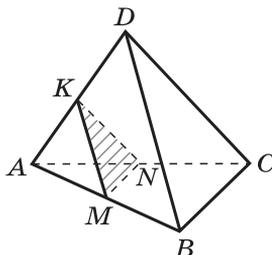
1. Объясните, как построить сечение тетраэдра  $DABC$  плоскостью, проходящей через данные точки  $M, N, K$ .

2. В задачах 1—3 найдите периметр сечения, если  $M, N, K$  — середины рёбер и каждое ребро тетраэдра равно  $a$ .

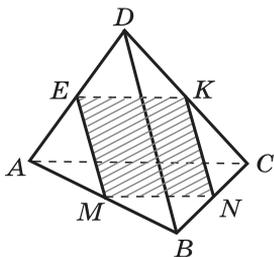
1.



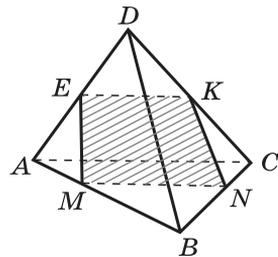
2.



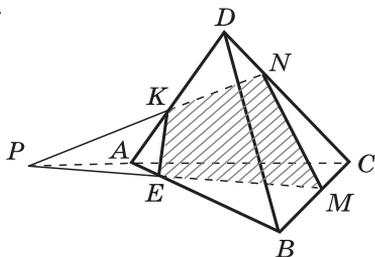
3.



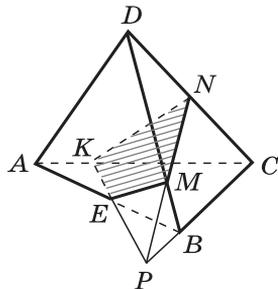
4.



5.



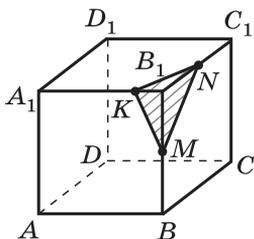
6.



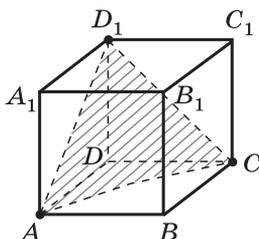
1. Объясните, как построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки, являющиеся либо вершинами куба, либо серединами его рёбер (три данные точки на рисунках выделены).

2. В задачах 1—4 и 6 найдите периметр сечения, если ребро куба равно  $a$ . В задаче 5 докажите, что  $AE = \frac{1}{3}a$ .

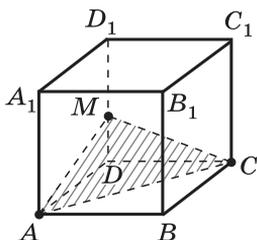
1.



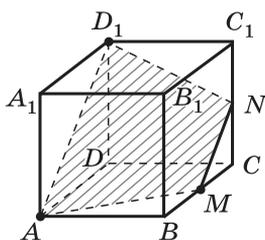
2.



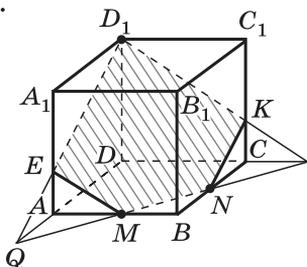
3.



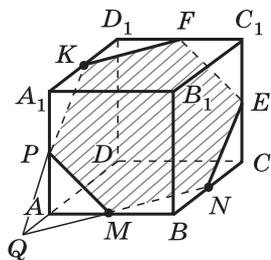
4.



5.



6.

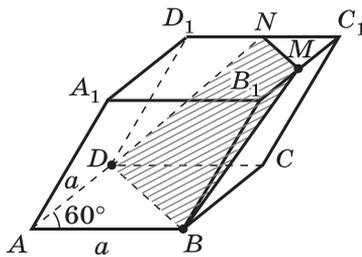


**Задача.** Все грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной  $a$  и острым углом  $60^\circ$ .

1. Объясните, как построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки  $B$ ,  $D$  и  $M$ , если  $M$  — середина ребра  $B_1C_1$ .

2. Докажите, что построенное сечение есть равнобедренная трапеция.

3. Найдите стороны трапеции.



**Решение.**

1) Пусть  $\alpha$  — секущая плоскость,  $\alpha \cap ABCD = BD$ ,  $\alpha \cap BCC_1B_1 = BM$ ,  $MN \parallel BD$ , сечение — трапеция  $BDNM$ .

2)  $\triangle BB_1M = \triangle DD_1N$ ,  $BM = DN$ , трапеция  $BDNM$  равнобедренная.

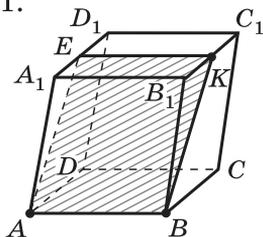
3)  $BD = a$ ,  $MN = \frac{a}{2}$ ,  $BM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ .

Приведите необходимые обоснования.

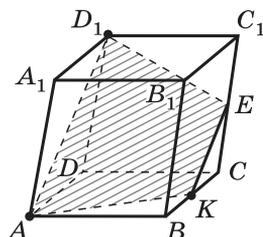
Постройте сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки:

1)  $A, B, K$ ;

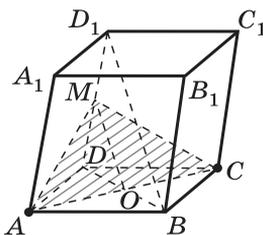
1.



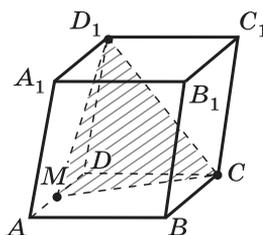
2)  $A, D_1, K$ ;



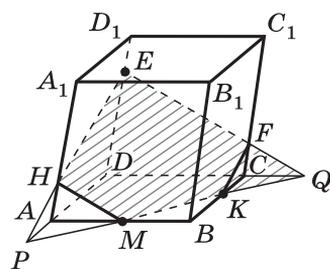
3)  $A$  и  $C$  параллельно диагонали  $BD_1$ ;



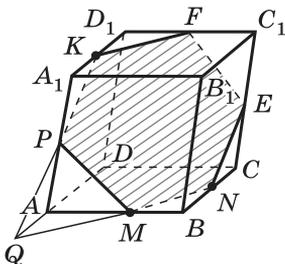
4)  $M, D_1, C$ ;



5)  $M, E, K$ ;



6)  $K, M, N$ .



При решении задач, связанных с сечением тетраэдра некоторой плоскостью, часто оказывается полезной теорема Менелая, в некоторых других задачах — теорема Чевы. Поэтому в классах с углублённым изучением математики изучение пункта 14 «Задачи на построение сечений» целесообразно совместить с изучением теорем Менелая и Чевы (пункты 95 и 96). Приведём пример такой задачи.

**Задача 1.** В тетраэдре  $ABCD$  на рёбрах  $AB$ ,  $AD$  и  $BC$  взяты соответственно точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  так, что  $AK:KB = 2:3$ ,  $AL=LD$ ,  $BM:MC = 4:5$ . Постройте сечение тетраэдра плоскостью  $KLM$  и найдите, в каком отношении эта плоскость делит ребро  $CD$ .

**Решение.**

1) Проведём отрезки  $KL$  и  $KM$ , а затем продолжим отрезки  $KL$  и  $BD$ , лежащие в плоскости  $ABD$ , до пересечения в точке  $E$  (рис. 1.33). Точки  $E$  и  $M$  лежат в секущей плоскости  $KLM$  и также в плоскости  $BCD$ .

Проведя отрезок  $ME$ , получим точку  $N$ , в которой секущая плоскость  $KLM$  пересекается с ребром  $CD$ . Четырёхугольник  $KLMN$  — искомое сечение.

2) Найдём отношение  $CN:ND$ . С этой целью применим теорему Менелая к треугольникам  $ABD$  и  $BCD$ . На сторонах  $AB$  и  $AD$  треугольника  $ABD$  лежат точки  $K$  и  $L$ , а на продолжении стороны  $BD$  — точка  $E$ , причём точки  $K$ ,  $L$  и  $E$  лежат на одной прямой. Поэтому согласно теореме Менелая имеет место равенство

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BE}{ED} \cdot \frac{DL}{LA} = 1.$$

По условию  $\frac{AK}{KB} = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{DL}{LA} = 1$ , следовательно,

$$\frac{BE}{ED} = \frac{3}{2}, \quad \frac{ED}{BE} = \frac{2}{3}.$$

На сторонах  $BC$  и  $CD$  треугольника  $BCD$  лежат точки  $M$  и  $N$ , а на продолжении стороны  $BD$  — точка  $E$ , при-

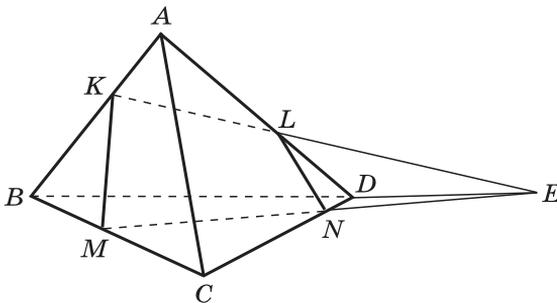


Рис. 1.33

чём точки  $M$ ,  $N$  и  $E$  расположены на одной прямой. По теореме Менелая

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{ND} \cdot \frac{DE}{BE} = 1.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{BM}{MC} = \frac{4}{5}, \quad \frac{DE}{BE} = \frac{2}{3},$$

находим искомое отношение  $CN:ND=15:8$ .

С целью использования теоремы Менелая в задаче 105 учебника можно дать *дополнительное задание*:

Найдите отношение, в котором плоскость  $MNK$  делит ребро  $AB$ , если  $CN:ND=2:1$ ,  $BM=MD$  и точка  $K$  — середина медианы  $AL$  треугольника  $ABC$ . (Ответ:  $3:2$ .)

Аналогичное *дополнительное задание* можно дать в задаче 106:

Найдите отношение, в котором плоскость  $MNK$  делит ребро  $BC$ , если она делит ребро  $AB$  в отношении  $1:4$  (считая от точки  $A$ ), точка  $K$  — середина ребра  $CD$ , а точка  $N$  лежит на медиане  $DL$  треугольника  $ACD$ , причём  $DN:NL=3:2$ . (Ответ:  $4:3$ .)

На применение теоремы Чевы можно рассмотреть следующую задачу:

**Задача 2.** На рёбрах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  тетраэдра  $ABCD$  отмечены точки  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  так, что  $AC_1:C_1B=1:2$ ,  $BA_1:A_1C=2:3$ ,  $CB_1:B_1A=3:1$ . Докажите, что плоскости  $ADA_1$ ,  $BDB_1$  и  $CAC_1$  пересекаются по прямой.

**Решение.** Так как  $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1} = 1$ , то согласно теореме Чевы в треугольнике  $ABC$  отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Обозначим её буквой  $E$ . Точки  $D$  и  $E$  — общие точки плоскостей  $ADA_1$ ,  $BDB_1$  и  $CDC_1$ . Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой  $DE$ .

Аналогично можно использовать теорему Чевы при решении задачи 108 учебника.

## Урок № 22

### Тема урока: Повторение вопросов теории и решение задач по всей теме «Параллельность прямых и плоскостей»

#### Примерный план проведения урока

1. Повторить основные вопросы темы «Параллельность прямых и плоскостей», заслушав ответы учащихся. Эти вопросы сформулированы в карточках к зачёту № 1.

2. Провести математический диктант № 1.1. Диктант приведён в дидактических материалах [1].

3. Рассмотреть решения некоторых задач из карточек к зачёту и из учебника.

Изучение темы «Параллельность прямых и плоскостей» завершается проведением контрольной работы № 1.2 и зачёта № 1 по данной теме.

## Урок № 23

### Контрольная работа № 1.2

#### Вариант 1

1<sup>0</sup>. Прямые  $a$  и  $b$  лежат в параллельных плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$ . Могут ли эти прямые быть: а) параллельными; б) скрещивающимися? Сделайте рисунок для каждого возможного случая.

2<sup>0</sup>. Через точку  $O$ , лежащую между параллельными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , проведены прямые  $l$  и  $m$ . Прямая  $l$  пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  в точках  $A_1$  и  $A_2$  соответственно, прямая  $m$  — в точках  $B_1$  и  $B_2$ . Найдите длину отрезка  $A_2B_2$ , если  $A_1B_1 = 12$  см,  $B_1O : OB_2 = 3 : 4$ .

3. Изобразите параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ , являющиеся серединами рёбер  $AB$ ,  $BC$  и  $DD_1$ .

#### Вариант 2

1<sup>0</sup>. Прямые  $a$  и  $b$  лежат в пересекающихся плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$ . Могут ли эти прямые быть: а) параллельными; б) скрещивающимися? Сделайте рисунок для каждого возможного случая.

2<sup>0</sup>. Через точку  $O$ , не лежащую между параллельными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , проведены прямые  $l$  и  $m$ . Прямая  $l$  пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  в точках  $A_1$  и  $A_2$  соответственно, прямая  $m$  — в точках  $B_1$  и  $B_2$ . Найдите длину отрезка  $A_1B_1$ , если  $A_2B_2 = 15$  см,  $OB_1 : OB_2 = 3 : 5$ .

3. Изобразите тетраэдр  $DABC$  и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки  $M$  и  $N$ , являющиеся серединами рёбер  $DC$  и  $BC$ , и точку  $K$ , такую, что  $K \in DA$ ,  $AK : KD = 1 : 3$ .

#### Ответы:

##### Вариант 1

1<sup>0</sup>. Рис. 1.34,  $a \parallel b$ ,  $a \div b'$ .

2<sup>0</sup>. 16 см.

3. Сечение — пятиугольник.

##### Вариант 2

1<sup>0</sup>. Рис. 1.35,  $a \parallel b$ ,  $a \div b'$ .

2<sup>0</sup>. 9 см.

3. Сечение — трапеция.

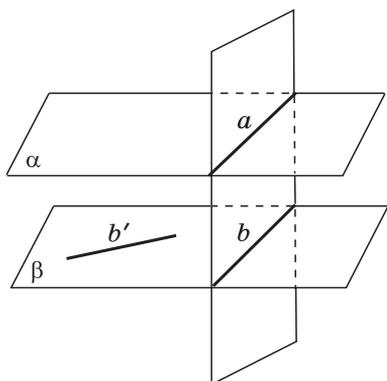


Рис. 1.34

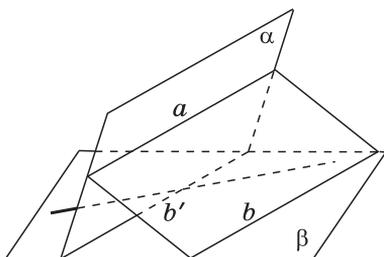


Рис. 1.35

## Урок № 24

### Зачёт № 1. Параллельность прямых и плоскостей

#### Карточка 1

1. Сформулируйте аксиомы  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  стереометрии. Сформулируйте и докажите следствия из аксиом.

2. Докажите, что через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

3. Плоскость  $\alpha$  пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  соответственно в точках  $B_1$  и  $C_1$ . Известно, что  $BC \parallel \alpha$ ,  $AB : B_1B = 5 : 3$ ,  $AC = 15$  см. Найдите  $AC_1$ .

#### Карточка 2

1. Сформулируйте определение параллельных прямой и плоскости. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую признак параллельности прямой и плоскости.

2. Докажите, что если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

3. Каждое ребро тетраэдра  $DABC$  равно 2 см. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки  $B$ ,  $C$  и середину ребра  $AD$ . Вычислите периметр сечения.

#### Карточка 3

1. Сформулируйте определение скрещивающихся прямых. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую признак скрещивающихся прямых.

2. Докажите, что если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

3. Постройте сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки  $A$ ,  $C$  и  $M$ , где  $M$  — середина ребра  $A_1 D_1$ .

#### Карточка 4

1. Сформулируйте определение параллельных плоскостей. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую признак параллельности двух плоскостей.

2. Докажите, что через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

3.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб, ребро которого 4 см. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $A$ ,  $D_1$  и  $M$ , где  $M$  — середина ребра  $BC$ . Вычислите периметр сечения.

#### Карточка 5

1. Докажите, что противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

2. Докажите, что если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.

3. Параллельные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекают сторону  $AB$  угла  $BAC$  соответственно в точках  $A_1$  и  $A_2$ , а сторону  $AC$  этого угла соответственно в точках  $B_1$  и  $B_2$ . Найдите  $AA_1$ , если  $A_1 A_2 = 6$  см,  $AB_2 : AB_1 = 3 : 2$ .

#### Карточка 6

1. Докажите, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

2. Докажите, что если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

3. Точка  $C$  лежит на отрезке  $AB$ . Через точку  $A$  проведена плоскость, а через точки  $B$  и  $C$  — параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках  $B_1$  и  $C_1$ . Найдите длину отрезка  $BB_1$ , если  $AC : CB = 4 : 3$ ,  $CC_1 = 8$  см.

## **Некоторые рекомендации к проведению зачёта**

1. Карточки к зачёту, содержащие основные вопросы теории и некоторые типичные задачи, даются учащимся заблаговременно (примерно за две недели до проведения зачёта).

2. Готовясь к зачёту, учащиеся делают какие-то записи. Эти записи (возможно, в виде черновиков), свидетельствующие о повторении учебного материала и подготовке к зачёту, учащиеся показывают учителю в день проведения зачёта. Они могут быть использованы на зачёте. При этом на основе беседы и дополнительных вопросов учитель выясняет глубину усвоения темы учащимися.

3. Зачёт проводит учитель с помощью наиболее подготовленных учащихся — консультантов. Для этого класс нужно разделить на несколько групп, в каждой из которых 4—5 учеников. Один из них является помощником учителя в проведении зачёта. По предыдущим урокам и в начале зачёта учитель должен убедиться в том, что консультанты сами на хорошем уровне владеют учебным материалом.

4. В течение урока учитель ведёт опрос многих учащихся. В конце урока он утверждает оценки, выставленные консультантами. В отдельных случаях после урока учитель может проверить записи учащихся, выполненные на уроке, и после этого выставить окончательную оценку по зачёту.

5. Итоговую оценку за полугодие учитель выставляет на основе текущих оценок за самостоятельные и контрольные работы, а также устного ответа учащихся. Решающая роль при этом принадлежит оценке по зачёту.

**ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ  
И ПЛОСКОСТЕЙ**

**§ 1. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ  
И ПЛОСКОСТИ**

**Урок № 25**

**Тема урока: Перпендикулярные прямые  
в пространстве. Параллельные прямые,  
перпендикулярные к плоскости**

**Основные задачи урока**

Ввести понятие перпендикулярных прямых в пространстве, доказать лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой, дать определение перпендикулярности прямой и плоскости, доказать теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

**Примерный план проведения урока**

1. Напомнить понятие угла между двумя скрещивающимися прямыми, ввести понятие перпендикулярности двух прямых в пространстве. Отметить, что перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися (см. рис. 43 учебника).

2. Доказать лемму: если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Доказательство основано на использовании понятия угла между прямыми и может быть проведено самими учащимися с опорой на текст и рисунок 44 учебника.

3. Сформулировать определение перпендикулярности прямой и плоскости. Ввести обозначение  $a \perp \alpha$ . Проиллюстрировать понятие перпендикулярности прямой и плоскости с помощью рисунка 45 и примеров из жизни.

4. Доказать теорему: если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство теоремы несложное. Оно основано на определении перпендикулярности прямой и плоскости и рассмотренной выше лемме и состоит из двух этапов:

1)  $x \subset \alpha$ ,  $x$  — произвольная прямая. Из условия  $a \perp \alpha$  следует (по определению перпендикулярности прямой и плоскости), что  $a \perp x$ ;

2) так как  $a_1 \parallel a$  (по условию) и  $a \perp x$ , то (согласно лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой)  $a_1 \perp x$ .

Итак, прямая  $a_1$  перпендикулярна к произвольной прямой  $x$ , лежащей в плоскости  $\alpha$ . А это означает, что  $a_1 \perp \alpha$ .

**5.** Доказать обратную теорему: если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

Доказательство проводится по учебнику (см. рис. 47, а, б). Повторить это доказательство можно на следующих уроках.

На первый взгляд может показаться странным, почему эта теорема названа обратной предыдущей теореме. Ведь в предыдущей теореме условие состояло в том, что  $a \parallel a_1$  и  $a \perp \alpha$ , а заключением теоремы было:  $a_1 \perp \alpha$ . В данной теореме условие состоит в том, что  $a \perp \alpha$  и  $a_1 \perp \alpha$ , а заключение — в том, что  $a \parallel a_1$ .

Таким образом, с формальной точки зрения данная теорема не является обратной предыдущей, поскольку условие и заключение данной теоремы не совпадают соответственно с заключением и условием предыдущей теоремы. Тем не менее можно так сформулировать эти теоремы, что каждая из них будет обратной другой.

Приведём эту формулировку.

Пусть прямая  $a$  перпендикулярна к плоскости  $\alpha$ . Тогда: если  $a \parallel a_1$ , то  $a_1 \perp \alpha$ , и обратно:

если  $a_1 \perp \alpha$ , то  $a \parallel a_1$ .

**6.** Для классной и домашней работы можно использовать задачи 116—118, 120.

**Задача 116 а).** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что  $DC \perp B_1 C_1$  и  $AB \perp A_1 D_1$ , если  $\angle BAD = 90^\circ$ .

Решение.

1) В параллелепипеде все грани — параллелограммы. Так как  $\angle BAD = 90^\circ$  (по условию), то грань  $ABCD$  — прямоугольник, поэтому  $AB \perp AD$  и  $DC \perp BC$  (рис. 2.1).

2)  $B_1 C_1 \parallel BC$  (так как грань  $BB_1 C_1 C$  — параллелограмм) и  $BC \perp DC$ . Отсюда по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей  $B_1 C_1 \perp DC$ .

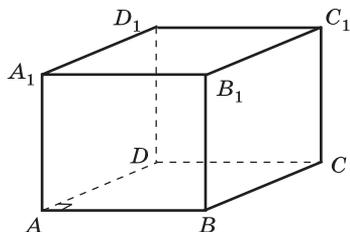


Рис. 2.1

3) Аналогично доказывается, что  $AB \perp A_1D_1$ . Действительно,  $A_1D_1 \parallel AD$  (так как  $AA_1D_1D$  — параллелограмм) и  $AB \perp AD$ , поэтому  $AB \perp A_1D_1$ .

**Задача 120.** Через точку  $O$  пересечения диагоналей квадрата со стороной  $a$  проведена прямая  $OK$ , перпендикулярная к плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки  $K$  до вершин квадрата, если  $OK = b$ .

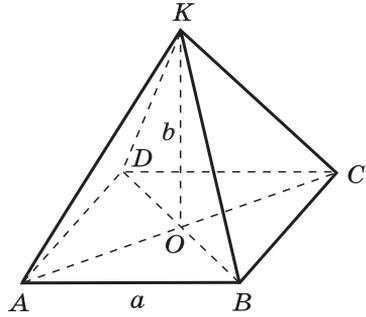


Рис. 2.2

**Решение.**

1) Прямая  $OK$  перпендикулярна к плоскости квадрата  $ABCD$ , поэтому  $OK \perp AC$  и  $OK \perp BD$ .

2) Треугольники  $KAO$ ,  $KBO$ ,  $KCO$  и  $KDO$  равны по двум катетам, откуда  $KA = KB = KC = KD$  (рис. 2.2).

3) Так как  $OA = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  и  $KA = \sqrt{KO^2 + OA^2}$ , то

$$KA = \sqrt{b^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 + 2a^2}}{2}.$$

## Урок № 26

### Тема урока: Признак перпендикулярности прямой и плоскости

#### Основные задачи урока

Изучить теорему, выражающую признак перпендикулярности прямой и плоскости; рассмотреть задачи на применение этой теоремы.

#### Примерный план проведения урока

1. Повторить теоретический материал предыдущего урока путём опроса учащихся.

2. В качестве подготовительной работы к изучению нового материала решить задачу 119.

**Задача 119.** Прямая  $OA$  перпендикулярна к плоскости  $OBC$ , и точка  $O$  является серединой отрезка  $AD$ . Докажите, что: а)  $AB = DB$ ; б)  $AB = AC$ , если  $OB = OC$ ; в)  $OB = OC$ , если  $AB = AC$ .

**Решение.**

а)  $OA \perp OBC$  по условию, следовательно,  $OA \perp OB$  по определению перпендикулярности прямой к плоскости.  $OA = OD$  по условию задачи, поэтому прямая  $OB$  является

серединным перпендикуляром к отрезку  $AD$ , и, следовательно,  $AB = DB$  (рис. 2.3).

б) Так как по условию  $OA \perp OBC$ , то  $OA \perp OC$ . Если  $OB = OC$ , то прямоугольные треугольники  $AOC$  и  $AOB$  равны по двум катетам, и, следовательно, равны их гипотенузы, т. е.  $AB = AC$ .

в) Если  $AB = AC$ , то прямоугольные треугольники  $AOC$  и  $AOB$  равны по катету и гипотенузе, откуда следует, что  $OB = OC$ .

**3. Доказать теорему, выражающую признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.**

В процессе доказательства теоремы выделяются следующие этапы:

1) Вначале рассматриваем случай, когда прямая  $a$  проходит через точку  $O$  пересечения прямых  $p$  и  $q$ , лежащих на плоскости  $\alpha$ . Доказываем, что прямая  $a$  перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости  $\alpha$  и проходящей через точку  $O$ .

2) Используя лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей, делаем вывод о перпендикулярности прямой  $a$  к любой прямой, лежащей в плоскости  $\alpha$ . Это означает, что  $a \perp \alpha$ .

3) Рассматриваем теперь случай, когда прямая  $a$  не проходит через точку  $O$  пересечения  $p$  и  $q$ . В этом случае проводим через точку  $O$  прямую  $a_1$ , параллельную прямой  $a$ . В силу упомянутой леммы  $a_1 \perp p$  и  $a_1 \perp q$ , и поэтому согласно доказанному в первом случае  $a_1 \perp \alpha$ . Отсюда по первой теореме п. 16 следует, что  $a \perp \alpha$ . Это завершает доказательство теоремы.

**4.** В связи с тем что доказательство теоремы состоит из нескольких этапов, можно предложить учащимся записать план доказательства в соответствии с содержанием слайда 2.1.

Слайд может быть использован при подведении итогов данного урока и на следующем уроке.

**5.** Для классной и домашней работы можно использовать задачи 121, 124, 126, 128.

**Задача 128.** Через точку  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$  проведена прямая  $OM$  так, что  $MA = MC$ ,  $MB = MD$ . Докажите, что прямая  $OM$  перпендикулярна к плоскости параллелограмма.

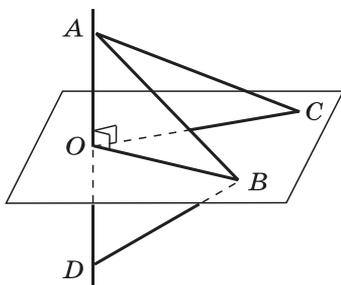


Рис. 2.3



Решение.

1) Так как  $MA = MC$  (по условию) и  $AO = OC$  (диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам), то отрезок  $MO$  — медиана равнобедренного треугольника  $AMC$  (рис. 2.4).

Следовательно,  $MO$  также высота этого треугольника, т. е.  $MO \perp AC$ .

2) Аналогично доказывается, что  $MO \perp BD$ .

3) Так как  $MO \perp AC$  и  $MO \perp BD$ , то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости  $MO \perp ABCD$ .

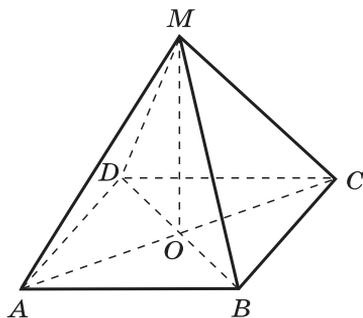


Рис. 2.4

## Урок № 27

### **Тема урока: Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости**

#### **Основные задачи урока**

Повторить доказательство теоремы, выражающей признак перпендикулярности прямой и плоскости; рассмотреть теорему из п. 18: через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

#### **Примерный план проведения урока**

1. Повторить доказательство теоремы, выражающей признак перпендикулярности прямой и плоскости.

2. Проверить выборочно решения задач из домашней работы.

3. Сформулировать теорему: через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

Наглядно утверждение теоремы представляется вполне очевидным, однако строгое её доказательство не является простым.

Учащимся, проявляющим повышенный интерес к математике, можно предложить разобрать доказательство дома самим по учебнику. При этом следует обратить их внимание на то, что в первой части доказательства вводится в рассмотрение плоскость  $\beta$ , проходящая через данную точку  $M$  и перпендикулярная к данной прямой  $a$ . Существование такой плоскости доказано в задаче с решением, приведённой в п. 17, а единственность такой плоскости

доказана в задаче 133, которая также дана с решением. Таким образом, полное доказательство данной теоремы весьма громоздко, и поэтому учитель по своему усмотрению может изложить его с той или иной степенью полноты в зависимости от уровня класса. Отдельные фрагменты доказательства (задача из п. 17, задача 133) можно рассмотреть на уроках № 28—30, посвящённых повторению теории и решению задач по теме.

4. Провести фронтальный опрос учащихся, используя слайд 2.2.

## 2.2

**Задача.** В треугольнике  $ABC$  дано:  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 12$  см,  $BC = 16$  см,  $CM$  — медиана. Через вершину  $C$  проведена прямая  $CK$ , перпендикулярная к плоскости треугольника  $ABC$ ,  $CK = 24$  см.

1. Найдите  $KM$ .

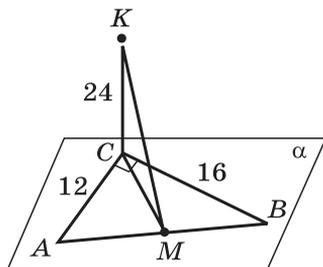
2. Составьте план решения задачи, если отрезок  $CM$  — высота треугольника.

3. Составьте план решения задачи, если отрезок  $CM$  — биссектриса треугольника.

1)  $AB = 20$  см,  $CM = \frac{1}{2}AB = 10$  см,  $KM = 26$  см.

2)  $20 \cdot CM = 12 \cdot 16$ .

3)  $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot CM \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot CM \cdot \sin 45^\circ$ .



5. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 122, 123, 125, 127.

**Задача 122.** Прямая  $CD$  перпендикулярна к плоскости правильного треугольника  $ABC$ . Через центр  $O$  этого треугольника проведена прямая  $OK$ , параллельная прямой  $CD$ . Известно, что  $AB = 16\sqrt{3}$  см,  $OK = 12$  см,  $CD = 16$  см. Найдите расстояния от точек  $D$  и  $K$  до вершин  $A$  и  $B$  треугольника.

Решение.

1) По условию задачи  $OK \parallel CD$ , следовательно,  $OK \perp ABC$  (рис. 2.5).

2) Точка  $O$  — центр правильного треугольника  $ABC$ , следовательно,  $OA = OB = OC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 16$  см.

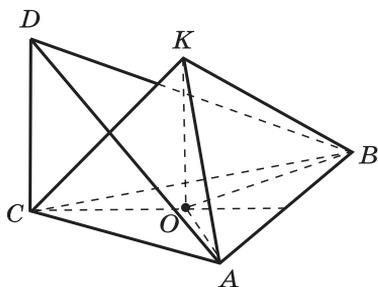


Рис. 2.5

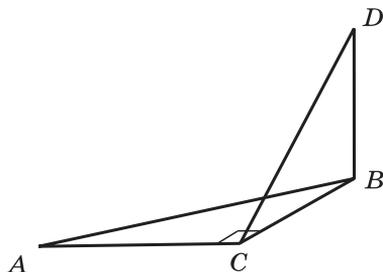


Рис. 2.6

3) Из  $\triangle KOA$  получаем

$$KA = \sqrt{KO^2 + OA^2},$$

$$KA = \sqrt{144 + 256} \text{ см} = 20 \text{ см}.$$

Аналогично находим  $KB = 20$  см.

4) Из  $\triangle DCA$  имеем

$$DA = \sqrt{DC^2 + CA^2},$$

$$DA = \sqrt{256 + 256 \cdot 3} \text{ см} = 32 \text{ см}.$$

Аналогично из  $\triangle DCB$  находим

$$DB = \sqrt{DC^2 + BC^2} = 32 \text{ см}.$$

Ответ:  $KA = KB = 20$  см,  $DA = DB = 32$  см.

**Задача 127.** В треугольнике  $ABC$  сумма углов  $A$  и  $B$  равна  $90^\circ$ . Прямая  $BD$  перпендикулярна к плоскости  $ABC$ . Докажите, что  $CD \perp AC$ .

Решение.

1)  $\angle A + \angle B = 90^\circ$ , следовательно,  $\angle C = 90^\circ$ , т. е.  $AC \perp CB$  (рис. 2.6).

2)  $BD \perp ABC$ , значит,  $BD \perp AC$ .

3) Итак,  $AC \perp CB$  и  $AC \perp BD$ . Значит,  $AC \perp BCD$  (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), поэтому  $AC \perp CD$  по определению перпендикулярности прямой и плоскости.

## Уроки № 28–30

**Тема уроков: Решение задач на перпендикулярность прямой и плоскости. Повторение вопросов теории**

### Основные задачи уроков

Выработать навыки решения основных типов задач на перпендикулярность прямой и плоскости, повторить вопросы теории.

### Примерный план проведения уроков

1. Повторить вопросы теории в ходе опроса учащихся (пп. 15—18).

2. Решить выборочно задачи 129—137, использовать вопросы 1—9 к главе II.

3. Рассмотреть частично или полностью доказательство теоремы из п. 18.

4. Можно использовать задачи из дидактических материалов [1].

5. Можно провести математический диктант (№ 2 в дидактических материалах [1]).

6. Полезна работа на уроке со слайдом 2.3.

На уроке № 30 проводится самостоятельная работа.

### Самостоятельная работа № 2.1

#### Вариант 1

1<sup>0</sup>. Дано:  $AB \perp \alpha$ ,  $M$  и  $K$  — произвольные точки плоскости  $\alpha$ . Докажите, что  $AB \perp MK$ .

2. Треугольник  $ABC$  правильный, точка  $O$  — его центр. Прямая  $OM$  перпендикулярна к плоскости  $ABC$ .

а) Докажите, что  $MA = MB = MC$ .

б) Найдите  $MA$ , если  $AB = 6$  см,  $MO = 2$  см.

### 2.3

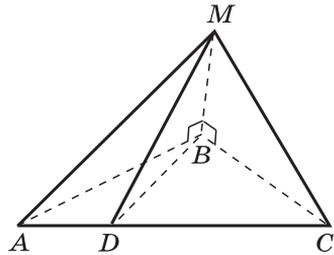
**Задача.** Дан тетраэдр  $MABC$ , в котором  $MB \perp BC$  и  $MB \perp BA$ .

1. Докажите, что треугольник  $MBD$  прямоугольный, если  $D$  — произвольная точка отрезка  $AC$ .

2. Найдите  $MD$  и площадь треугольника  $MBD$ , если  $MB = BD = a$ .

1)  $MB \perp BC$ ,  $MB \perp BA$ , поэтому  $MB \perp ABC$ , следовательно,  $MB \perp BD$ .

2)  $MD = a\sqrt{2}$ ,  $S_{MBD} = 0,5a^2$ .



#### Вариант 2

1<sup>0</sup>. Дано: прямая  $MA$  перпендикулярна к плоскости треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $MA \perp BC$ .

2. Четырёхугольник  $ABCD$  — квадрат, точка  $O$  — его центр. Прямая  $OM$  перпендикулярна к плоскости квадрата.

- а)<sup>0</sup> Докажите, что  $MA = MB = MC = MD$ .  
 б) Найдите  $MA$ , если  $AB = 4$  см,  $OM = 1$  см.

**Ответы:**

**Вариант 1.** 2б. 4 см.

**Вариант 2.** 2б. 3 см.

**Задача 129.** Прямая  $AM$  перпендикулярна к плоскости квадрата  $ABCD$ , диагонали которого пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что:

- а) прямая  $BD$  перпендикулярна к плоскости  $AMO$ ;  
 б)  $MO \perp BD$ .

**Решение.**

а)  $MA \perp ABCD$ , следовательно,  $MA \perp BD$  по определению перпендикулярности прямой и плоскости,  $BD \perp AC$  по свойству диагоналей квадрата (рис. 2.7).

Итак,  $BD \perp AO$  и  $BD \perp AM$ , следовательно,  $BD \perp AMO$  по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

б) Так как  $BD \perp MOA$ , то прямая  $BD$  перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости  $MOA$ , в частности  $BD \perp MO$ .

**Задача 134.** Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку  $M$  прямой  $a$  и перпендикулярные к этой прямой, лежат в плоскости, проходящей через точку  $M$  и перпендикулярной к прямой  $a$ .

**Решение.** Обозначим буквой  $\alpha$  плоскость, проходящую через точку  $M$  прямой  $a$  и перпендикулярную к этой прямой, и рассмотрим произвольную прямую  $b$ , также проходящую через точку  $M$  и перпендикулярную к прямой  $a$ . Требуется доказать, что  $b \subset \alpha$  (рис. 2.8). Допустим, что это не так. Тогда плоскость  $\beta$ , проходящая через прямые  $a$  и  $b$ , пересекается с плоскостью  $\alpha$  по некоторой прямой  $b_1$ , проходящей через точку  $M$  и отличной от прямой  $b$ . Так как  $a \perp \alpha$  и  $b_1 \subset \alpha$ , то  $a \perp b_1$ . Мы получили, что в плоскости  $\beta$  через точку  $M$  проходят две прямые ( $b$  и  $b_1$ ), перпендикулярные к прямой  $a$ , чего не может быть. Значит, предположение неверно, и прямая  $b$  лежит в плоскости  $\alpha$ .

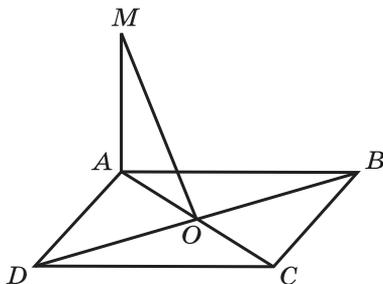


Рис. 2.7

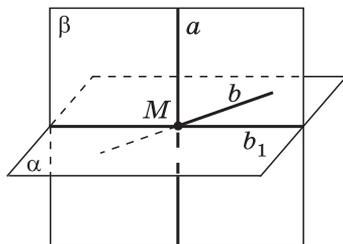


Рис. 2.8

**Задача 136.** Докажите, что если точка  $X$  равноудалена от концов данного отрезка  $AB$ , то она лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка  $AB$  и перпендикулярной к прямой  $AB$ .

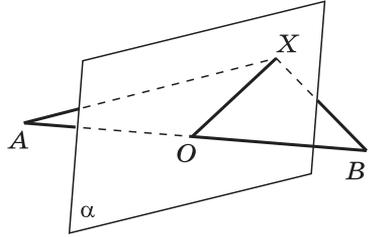


Рис. 2.9

**Решение.** Обозначим буквой  $\alpha$  плоскость, проходящую через середину  $O$  отрезка  $AB$  и перпендикулярную к прямой  $AB$  (рис. 2.9). Пусть точка  $X$  равноудалена от концов отрезка  $AB$ , т. е.  $XA = XB$ . Требуется доказать, что  $X \in \alpha$ .

Если точка  $X$  лежит на прямой  $AB$ , то она совпадает с точкой  $O$ , и поэтому  $X \in \alpha$ .

Если точка  $X$  не лежит на прямой  $AB$ , то отрезок  $XO$  является медианой равнобедренного треугольника  $AXB$  и, следовательно, высотой этого треугольника, т. е.  $XO \perp AB$ .

Таким образом, прямая  $XO$  проходит через точку  $O$  прямой  $AB$  и перпендикулярна к прямой  $AB$ . Отсюда следует (см. задачу 134), что прямая  $XO$  лежит в плоскости  $\alpha$ , и поэтому  $X \in \alpha$ .

**Задача 137.** Докажите, что через каждую из двух взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых проходит плоскость, перпендикулярная к другой прямой.

**Решение.** Пусть  $a$  и  $b$  — взаимно перпендикулярные скрещивающиеся прямые. Докажем, что через прямую  $a$  проходит плоскость, перпендикулярная к прямой  $b$ .

1) Через произвольную точку  $O$  прямой  $a$  проведём прямую  $b_1$ , параллельную прямой  $b$ . Тогда  $a \perp b_1$ , так как по условию  $a \perp b$  (рис. 2.10).

2) Обозначим буквой  $\beta$  плоскость, проходящую через пересекающиеся прямые  $a$  и  $b_1$ , и проведём через точку  $O$  прямую  $c$ , перпендикулярную к плоскости  $\beta$ . Тогда  $c \perp b_1$ , а так как  $b \parallel b_1$ , то  $c \perp b$ .

3) Обозначим буквой  $\alpha$  плоскость, проходящую через пересекающиеся прямые  $a$  и  $c$ . Так как  $b \perp a$  (по условию) и  $b \perp c$ , то  $b \perp \alpha$  (по признаку перпен-

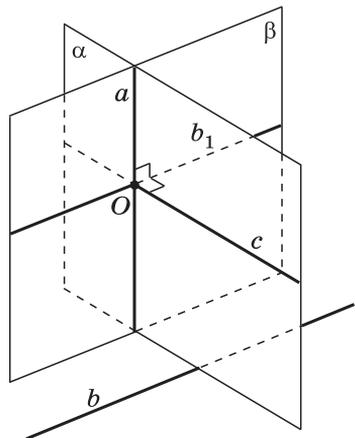


Рис. 2.10

дикулярности прямой и плоскости). Итак, через прямую  $a$  проходит плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная к прямой  $b$ .

Аналогично доказывается, что через прямую  $b$  проходит плоскость, перпендикулярная к прямой  $a$ .

## § 2. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

### Урок № 31

**Тема урока: Расстояние от точки до плоскости.  
Теорема о трёх перпендикулярах**

#### Основные задачи урока

Ввести понятие расстояния от точки до плоскости, доказать теорему о трёх перпендикулярах, показать применение этой теоремы при решении задач.

#### Примерный план проведения урока

1. Используя рисунок 51 учебника, ввести понятия перпендикуляра к плоскости, наклонной, проекции наклонной на плоскость. Рассматривая прямоугольный треугольник  $AMH$  (см. рис. 51), доказать, что перпендикуляр, проведённый из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой плоскости. Длина перпендикуляра, проведённого из точки к плоскости, называется расстоянием от этой точки до плоскости.

2. Обратить внимание на замечания 1, 2, 3 в п. 19 учебника, в которых введены понятия расстояния между параллельными плоскостями, параллельными прямой и плоскостью, скрещивающимися прямыми. Полезно выполнить рисунки и обосновать справедливость утверждений, приведённых в замечаниях.

**Замечание 1.** Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости.

Пусть  $\alpha \parallel \beta$ ,  $A \in \alpha$ ,  $M \in \alpha$ . Проведём  $AA_0 \perp \beta$  и  $MM_0 \perp \beta$ , тогда

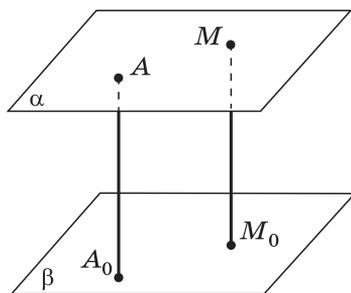


Рис. 2.11

$AA_0 \parallel MM_0$  (рис. 2.11), поэтому  $AA_0 = MM_0$  (как отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями).

Итак, расстояния от двух произвольных точек  $A$  и  $M$  плоскости  $\alpha$  до плоскости  $\beta$  равны друг другу. То же самое относится к расстояниям от точек плоскости  $\beta$  до плоскости  $\alpha$ .

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется расстоянием между параллельными плоскостями.

**Замечание 2.** Если прямая и плоскость параллельны, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости.

Доказательство утверждения приведено в решении задачи 144, учащиеся могут прочесть его самостоятельно.

Можно предложить другой вариант доказательства.

Пусть  $a \parallel \alpha$ ,  $A \in a$ ,  $B \in a$ . Проведём  $AA_1 \perp \alpha$  и  $BB_1 \perp \alpha$  (рис. 2.12). Тогда  $AA_1 \parallel BB_1$ . Докажем, что  $AA_1 = BB_1$ .

Плоскость, проходящая через параллельные прямые  $AA_1$  и  $BB_1$ , пересекается с плоскостью  $\alpha$  по прямой  $A_1B_1$  и содержит прямую  $AB$ . Ясно, что  $AB \parallel A_1B_1$  (если бы эти прямые пересекались, то прямая  $AB$  (т. е. прямая  $a$ ) пересекалась бы с плоскостью  $\alpha$ , что противоречит условию  $a \parallel \alpha$ ).

Итак,  $AA_1 \parallel BB_1$  и  $AB \parallel A_1B_1$ . Следовательно, четырёхугольник  $ABB_1A_1$  — параллелограмм, и поэтому  $AA_1 = BB_1$ .

Таким образом, расстояния от двух произвольных точек  $A$  и  $B$  прямой  $a$  до параллельной ей плоскости  $\alpha$  равны между собой.

Если прямая и плоскость параллельны, то расстоянием между прямой и плоскостью называется расстояние от произвольной точки прямой до этой плоскости.

**Замечание 3.** Если две прямые скрещивающиеся, то расстоянием между ними называется расстояние между одной из них и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой прямой.

Целесообразно напомнить, как выполняется построение плоскости, содержащей одну из скрещивающихся прямых и параллельной другой прямой (рис. 2.13).

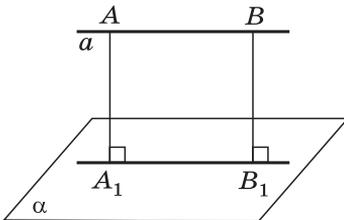


Рис. 2.12

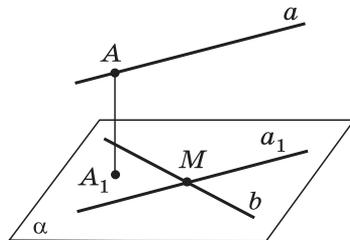


Рис. 2.13

Пусть  $a \div b$ . Через произвольную точку  $M$  прямой  $b$  проведём прямую  $a_1$ , параллельную  $a$ . Пересекающиеся прямые  $a_1$  и  $b$  определяют некоторую плоскость  $\alpha$ , параллельную прямой  $a$ .

Из произвольной точки  $A$  прямой  $a$  проводим перпендикуляр  $AA_1$  к плоскости  $\alpha$ . Длина этого перпендикуляра и есть расстояние между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$ .

В дальнейшем в процессе решения задач можно показать, как построить общий перпендикуляр к двум данным скрещивающимся прямым  $a$  и  $b$ , т. е. отрезок, перпендикулярный к прямым  $a$  и  $b$ , концы которого лежат на этих прямых.

3. Доказать теорему о трёх перпендикулярах и обратную ей теорему. При этом можно использовать рисунок 53 учебника или слайд 2.4.

### Теорема о трёх перпендикулярах

2.4

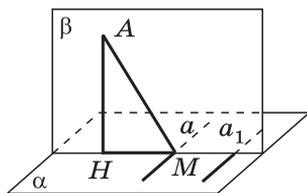
Дано:  $AH \perp \alpha$ ,  $AM$  — наклонная к плоскости  $\alpha$ ,  $HM$  — проекция наклонной,  $a \subset \alpha$ ,  $a \perp HM$ .

Докажите:  $a \perp AM$ .

Доказательство.

$AH \perp a$ , так как  $AH \perp \alpha$ .

$a \perp AH$ ,  $a \perp HM$ , следовательно,  $a \perp \beta$  по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Отсюда следует, что  $a \perp AM$  (по определению перпендикулярности прямой и плоскости).



Приведите полное обоснование обратной теоремы:  $a \subset \alpha$ ,  $a \perp AH$ ,  $a \perp AM$ , следовательно,  $a \perp \beta$  и поэтому  $a \perp HM$ .

4. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 138—145, 153.

**Задача 143.** Расстояние от точки  $M$  до каждой из вершин правильного треугольника  $ABC$  равно 4 см. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости  $ABC$ , если  $AB = 6$  см.

Решение.

1) По условию  $MA = MB = MC = 4$  см. Пусть  $MO \perp ABC$  (рис. 2.14), тогда  $OA = OB = OC$  (как проекции равных наклонных, см. задачу 139). Это означает, что точка  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ,

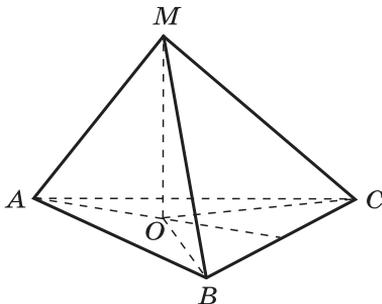


Рис. 2.14

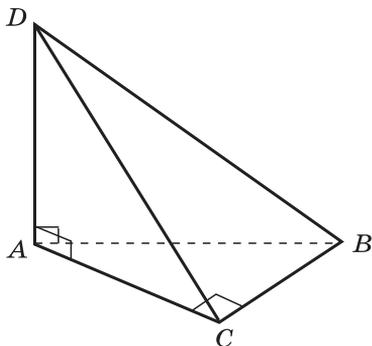


Рис. 2.15

а  $OA$  — радиус этой окружности. Известно, что  $a_3 = R\sqrt{3}$ , где  $a_3 = AB$ ,  $R = AO$ , поэтому  $AO = \frac{6}{\sqrt{3}} \text{ см} = 2\sqrt{3} \text{ см}$ .

2) Из  $\triangle MAO$  получаем

$$MO = \sqrt{MA^2 - AO^2}, \quad MO = \sqrt{16 - 12} \text{ см} = \sqrt{4} \text{ см} = 2 \text{ см}.$$

Ответ: 2 см.

**Задача 145.** Через вершину  $A$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  проведена прямая  $AD$ , перпендикулярная к плоскости треугольника.

а) Докажите, что треугольник  $CBD$  прямоугольный.

б) Найдите  $BD$ , если  $BC = a$ ,  $DC = b$ .

Решение.

а) Отрезок  $AC$  — проекция наклонной  $DC$  на плоскость треугольника  $ABC$  (рис. 2.15).  $BC \perp AC$  по условию, следовательно,  $BC \perp DC$  по теореме о трёх перпендикулярах и поэтому треугольник  $CBD$  прямоугольный.

б)  $BC = a$ ,  $DC = b$ . Из  $\triangle BCD$  получаем  $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2}$ ,  $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Ответ:  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

В дальнейшем в процессе решения задач важно обратить внимание учащихся на обобщённую теорему о трёх перпендикулярах, когда прямая  $a_1$  перпендикулярна к проекции наклонной, но не проходит через основание наклонной (слайд 2.4).

## Урок № 32

### Тема урока: Угол между прямой и плоскостью

#### Основные задачи урока

Ввести понятие угла между прямой и плоскостью; рассмотреть задачи, в которых используется это понятие.

## Примерный план проведения урока

1. Проверить выборочно решение задач из домашней работы. Решения задач типа 138—142 и доказательство теоремы о трёх перпендикулярах можно обсудить устно, используя готовые рисунки и слайды.

2. Ввести понятие проекции точки на плоскость, проекции фигуры на плоскость. Доказать, что проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая. При этом используются рисунки 54, 55 учебника.

3. Ввести определение угла между прямой и плоскостью.

4. Разобрать решение задачи 162, приведённое в учебнике. Доказать, что угол между данной прямой и плоскостью является наименьшим из всех углов, которые данная прямая образует с прямыми, проведёнными в плоскости через точку пересечения прямой с плоскостью.

Учащимся полезно сделать краткую запись доказательства, приведённого в слайде 2.5.

### Угол между прямой и её проекцией на плоскость

### 2.5

есть наименьший из всех углов между данной прямой и прямыми, лежащими в этой плоскости и проходящими через точку пересечения данной прямой с плоскостью.

Дано:  $MO \perp \alpha$ ,  $MA$  — наклонная,  $PQ \subset \alpha$ ,  $\angle MAO = \varphi_0$ ,  $\angle MAQ = \varphi$ .

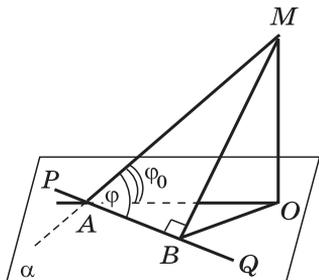
Докажите:  $\varphi_0 < \varphi$ .

Доказательство.

$MB \perp PQ$ ,  $MO < MB$ .

$\frac{MO}{MA} < \frac{MB}{MA}$ ,  $\sin \varphi_0 < \sin \varphi$ ,  $\varphi_0 < \varphi$ .

Приведите полное обоснование решения.



5. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 163—165, 146—148.

**Задача 165.** Из точки  $A$ , удалённой от плоскости  $\gamma$  на расстояние  $d$ , проведены к этой плоскости наклонные  $AB$  и  $AC$  под углом  $30^\circ$  к плоскости. Их проекции на плоскость  $\gamma$  образуют угол в  $120^\circ$ . Найдите  $BC$ .

Решение.

1) Из треугольника  $AOB$  имеем (рис. 2.16):

$$\frac{AO}{OB} = \operatorname{tg} 30^\circ, \quad OB = d\sqrt{3}.$$

2) Из треугольника  $AOC$  получаем

$$OC = d\sqrt{3}.$$

3) Из треугольника  $BOC$  по теореме косинусов находим

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos 120^\circ,$$

$$BC^2 = 3d^2 + 3d^2 - 2 \cdot d\sqrt{3} \cdot d\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$BC^2 = 9d^2, \quad BC = 3d.$$

Ответ:  $3d$ .

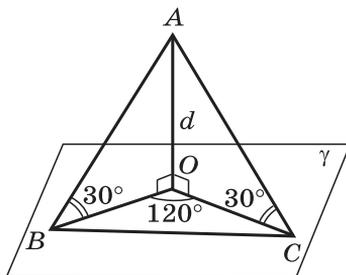


Рис. 2.16

## Уроки № 33—36

**Тема уроков: Повторение теории. Решение задач на применение теоремы о трёх перпендикулярах, на угол между прямой и плоскостью**

### Основные задачи уроков

Повторить доказательство теоремы о трёх перпендикулярах, понятие угла между прямой и плоскостью, закрепить навыки решения задач.

### Примерный план проведения уроков

1. На каждом из уроков № 33—35 повторить вопросы теории путём опроса учащихся.

2. В процессе решения задач повторить соотношения между элементами прямоугольного треугольника, теоремы синусов и косинусов.

3. Обратить особое внимание на решение некоторых типовых задач, которые будут использоваться в дальнейшем при вычислении площадей поверхностей и объёмов многогранников. К таким задачам относятся, например, задачи 147, 151, 158, 161. Полезно использовать на уроках приведённый ниже слайд 2.6, который предназначен для фронтальной работы с учащимися, обсуждения подходов к решению задач из учебника.

4. На уроке № 36 целесообразно провести самостоятельную работу контролирующего характера.

## Самостоятельная работа № 2.2

### Вариант 1

Из точки  $M$  проведён перпендикуляр  $MB$ , равный 4 см, к плоскости прямоугольника  $ABCD$ . Наклонные  $MA$  и  $MC$  образуют с плоскостью прямоугольника углы  $45^\circ$  и  $30^\circ$  соответственно.

а) Докажите, что треугольники  $MAD$  и  $MCD$  прямоугольные.

б) Найдите стороны прямоугольника.

в) Докажите, что треугольник  $BDC$  является проекцией треугольника  $MDC$  на плоскость прямоугольника, и найдите его площадь.

### Вариант 2

Из точки  $M$  проведён перпендикуляр  $MD$ , равный 6 см, к плоскости квадрата  $ABCD$ . Наклонная  $MB$  образует с плоскостью квадрата угол  $60^\circ$ .

а) Докажите, что треугольники  $MAB$  и  $MCB$  прямоугольные.

б) Найдите сторону квадрата.

в) Докажите, что треугольник  $ABD$  является проекцией треугольника  $MAB$  на плоскость квадрата, и найдите его площадь.

### Ответы:

Вариант 1. б)  $AB=4$  см,  $BC=4\sqrt{3}$  см; в)  $8\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.

Вариант 2. б)  $\sqrt{6}$  см; в) 3 см<sup>2</sup>.

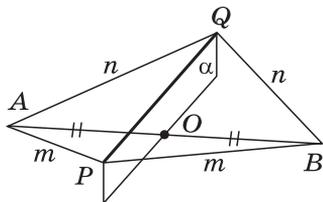
2.6

**Задача.** Найдите угол между скрещивающимися прямыми  $AB$  и  $PQ$ , если каждая из точек  $P$  и  $Q$  равноудалена от концов отрезка  $AB$ .

**Решение.**

$$PA = PB = m, \quad QA = QB = n.$$

Отсюда следует, что точки  $P$  и  $Q$  лежат в плоскости  $\alpha$ , проходящей через середину отрезка  $AB$ , и  $\alpha \perp AB$ . Поэтому  $PQ \subset \alpha$  и  $PQ \perp AB$ , т. е. искомый угол равен  $90^\circ$ .



**Задача 147.** Из точки  $M$  проведён перпендикуляр  $MB$  к плоскости прямоугольника  $ABCD$ . Докажите, что треугольники  $AMD$  и  $MCD$  прямоугольные.

Решение.

1) По условию задачи отрезок  $MB$  — перпендикуляр к плоскости прямоугольника, следовательно, отрезок  $AB$  есть проекция наклонной  $MA$  на плоскость прямоугольника (рис. 2.17).  $AD \perp AB$  (так как  $ABCD$  — прямоугольник), следовательно,  $AD \perp MA$  по теореме о трёх перпендикулярах. Таким образом, угол  $MAD$  прямой и, значит, треугольник  $AMD$  прямоугольный.

2) Аналогично, так как  $DC \perp BC$ , то  $DC \perp MC$  и треугольник  $MCD$  прямоугольный.

**Задача 151.** Прямая  $CD$  перпендикулярна к плоскости треугольника  $ABC$ . Докажите, что: а) треугольник  $ABC$  является проекцией треугольника  $ABD$  на плоскость  $ABC$ ; б) если  $CH$  — высота треугольника  $ABC$ , то  $DH$  — высота треугольника  $ABD$ .

Решение.

а) По условию задачи отрезок  $DC$  — перпендикуляр к плоскости  $ABC$ , следовательно, точка  $C$  есть проекция точки  $D$  на плоскость  $ABC$ , отрезок  $CB$  — проекция наклонной  $DB$ , а отрезок  $CA$  — проекция наклонной  $DA$  на плоскость  $ABC$  (рис. 2.18).

Все точки отрезка  $AB$  лежат в плоскости  $ABC$ , поэтому проекцией отрезка  $AB$  на плоскость  $ABC$  является сам этот отрезок.

Итак, проекциями сторон треугольника  $ABD$  на плоскость  $ABC$  являются соответствующие стороны треугольника  $ABC$ .

Очевидно также, что проекция  $M_1$  любой внутренней точки  $M$  треугольника  $ABD$  лежит внутри треугольника  $ABC$  и обратно: любая внутренняя точка  $M_1$  треугольника  $ABC$  является проекцией на плоскость  $ABC$  некоторой внутренней точки  $M$  треугольника  $ABD$ . Это и означает, что треугольник  $ABC$  является проекцией треугольника  $ABD$  на плоскость  $ABC$ .

б)  $AB \perp CH$  по условию, следовательно,  $AB \perp DH$  по теореме о трёх перпендикулярах, т. е.  $DH$  — высота треугольника  $ABD$ .

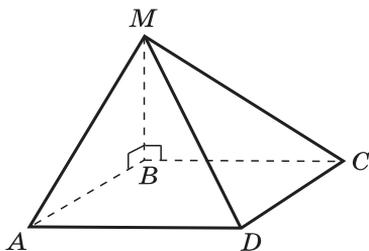


Рис. 2.17

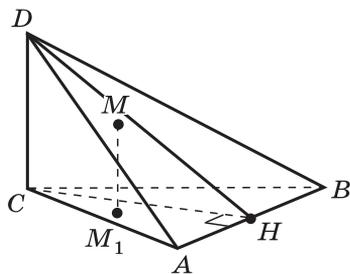


Рис. 2.18

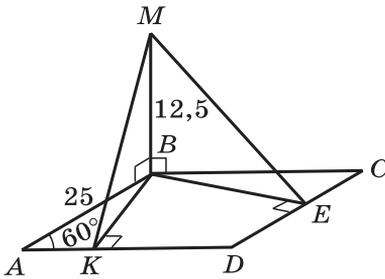


Рис. 2.19

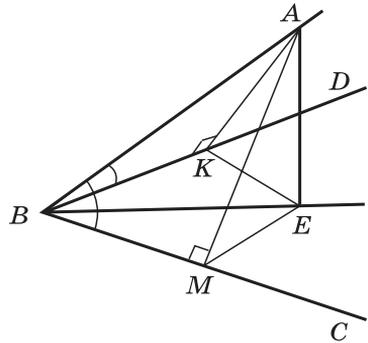


Рис. 2.20

**Задача 158.** Через вершину  $B$  ромба  $ABCD$  проведена прямая  $BM$ , перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояние от точки  $M$  до прямых, содержащих стороны ромба, если  $AB=25$  см,  $\angle BAD=60^\circ$ ,  $BM=12,5$  см.

Решение.

1) Проведём  $BK \perp AD$  (рис. 2.19). Отрезок  $BK$  — проекция наклонной  $MK$  на плоскость ромба,  $AD \perp BK$ , следовательно,  $AD \perp MK$  по теореме о трёх перпендикулярах. Длина отрезка  $MK$  равна расстоянию от точки  $M$  до прямой  $AD$ .

Аналогично  $ME$  — расстояние от точки  $M$  до прямой  $DC$ .

2) Из  $\triangle ABK$  получаем  $BK = AB \cdot \sin 60^\circ$ ,  $BK = \frac{25\sqrt{3}}{2}$  см.

3) Треугольник  $MVK$  прямоугольный, так как  $MB \perp ABC$ . Имеем

$$MK = \sqrt{MB^2 + BK^2}, \quad MK = \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{25\sqrt{3}}{2}\right)^2} \text{ см} = 25 \text{ см.}$$

4)  $BK = BE$  (как высоты ромба). Прямоугольные треугольники  $MVK$  и  $MVE$  равны по двум катетам, следовательно,  $ME = MK = 25$  см.

5) Расстояния от точки  $M$  до прямых  $AB$  и  $BC$  равны длине перпендикуляра  $MB$ , т. е. равны  $12,5$  см.

Ответ: 25 см, 25 см, 12,5 см, 12,5 см.

**Задача 161.** Луч  $BA$  не лежит в плоскости неразвёрнутого угла  $CBD$ . Докажите, что если  $\angle ABC = \angle ABD$ , причём  $\angle ABC < 90^\circ$ , то проекцией луча  $BA$  на плоскость  $CBD$  является биссектриса угла  $CBD$ .

Решение.

1) Пусть  $AE \perp CBD$ . В плоскости  $ABC$  проведём перпендикуляр  $AM$  к прямой  $BC$ , а в плоскости  $ABD$  — перпендикуляр  $AK$  к прямой  $BD$ . Так как  $\angle ABC < 90^\circ$ , то точка  $M$  лежит на луче  $BC$  (а не на продолжении этого

луча). Аналогично так как  $\angle ABD < 90^\circ$ , то точка  $K$  лежит на луче  $BD$  (рис. 2.20).

Так как  $BC \perp AM$ , то  $BC \perp EM$  (по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах). Аналогично доказыва-ется, что  $BD \perp EK$ .

2) Прямоугольные треугольники  $ABK$  и  $ABM$  равны по гипотенузе ( $AB$  — общая гипотенуза) и острому углу ( $\angle ABC = \angle ABD$ ), следовательно,  $BM = BK$ .

3) Прямоугольные треугольники  $BME$  и  $BKE$  равны по гипотенузе ( $BE$  — общая гипотенуза) и катету ( $BM = BK$ ), следовательно,  $EM = EK$ .

4) Точка  $E$  равноудалена от сторон угла  $CBD$ , следо-вательно, она лежит на биссектрисе этого угла, т. е. луч  $BE$  — биссектриса угла  $CBD$ .

### § 3. ДВУГРАННЫЙ УГОЛ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

#### Урок № 37

#### Тема урока: Двугранный угол

##### Основные задачи урока

Ввести понятия двугранного угла и его линейного угла, рассмотреть задачи на применение этих понятий.

##### Примерный план проведения урока

1. Ввести понятие двугранного угла, используя рису-нок 58 учебника.

2. Ввести понятие линейного угла двугранного угла. Доказать, что все линейные углы двугранного угла равны друг другу (см. рис. 59, а, б).

3. Дать определение градусной меры двугранного угла. Рассмотреть примеры острого, прямого и тупого двугран-ных углов, используя рисунок 60 учебника. Прямой дву-гранный угол можно показать на пересечении двух стен классной комнаты, а также стены и потолка или пола.

4. Для классной и домашней работы можно использо-вать выборочно задачи 166—170.

Следует обратить внимание учащихся на обозначение двугранных углов. Двугранный угол с ребром  $AB$ , на раз-ных гранях которого отмечены точки  $C$  и  $D$ , называется двугранным углом  $CABD$ .

**Задача 167.** В тетраэдре  $DABC$  все рёбра равны, точ-ка  $M$  — середина ребра  $AC$ . Докажите, что  $\angle DMB$  — линей-ный угол двугранного угла  $BACD$ .

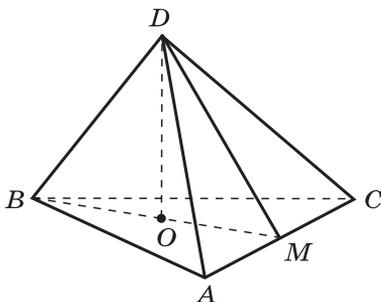


Рис. 2.21

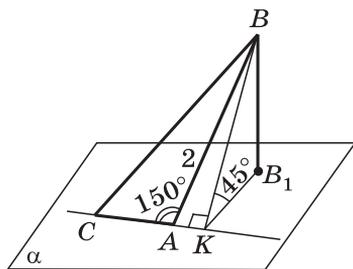


Рис. 2.22

**Решение.** Медианы  $BM$  и  $DM$  являются одновременно высотами правильных треугольников  $ABC$  и  $ADC$  (рис. 2.21). Поэтому  $BM \perp AC$  и  $DM \perp AC$ , и, следовательно,  $\angle DMB$  является линейным углом двугранного угла при ребре  $AC$  тетраэдра.

**Задача 170.** Из вершины  $B$  треугольника  $ABC$ , сторона  $AC$  которого лежит в плоскости  $\alpha$ , проведён к этой плоскости перпендикуляр  $BB_1$ . Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $AC$  и до плоскости  $\alpha$ , если  $AB = 2$  см,  $\angle BAC = 150^\circ$  и двугранный угол  $BACB_1$  равен  $45^\circ$ .

**Решение.**

1) Треугольник  $BAC$  тупоугольный с тупым углом  $A$ , поэтому основание его высоты  $BK$ , проведённой из вершины  $B$ , лежит на продолжении стороны  $AC$ . Расстояния от точки  $B$  до прямой  $AC$  и до плоскости  $\alpha$  равны соответственно  $BK$  и  $BB_1$  (рис. 2.22).

2) Так как  $AC \perp BK$ , то  $AC \perp KB_1$  по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах. Следовательно,  $\angle BKB_1$  — линейный угол двугранного угла  $BACB_1$ . По условию задачи  $\angle BKB_1 = 45^\circ$ .

3) Из  $\triangle BAK$  имеем  $\angle A = 30^\circ$ ,  $BK = BA \cdot \sin 30^\circ$ ,  $BK = 1$  см.

Из  $\triangle BKB_1$  получаем  $BB_1 = BK \cdot \sin 45^\circ$ ,  $BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  см.

Ответ:  $BK = 1$  см,  $BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  см.

## Урок № 38

### Тема урока: Признак перпендикулярности двух плоскостей

#### Основные задачи урока

Ввести понятие угла между плоскостями; дать определение перпендикулярных плоскостей; доказать теорему, выражающую признак перпендикулярности двух плоско-

стей; показать применение этой теоремы при решении задач.

### Примерный план проведения урока

1. Проверить выборочно решения задач из домашней работы. Желательно использовать слайды с готовыми чертежами.

2. Обратить внимание учащихся на то, что при пересечении двух плоскостей образуются четыре двугранных угла. Если  $\varphi$  — величина того из четырёх углов, который не превосходит каждого из остальных, то говорят, что угол между пересекающимися плоскостями равен  $\varphi$ . Ясно, что  $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$ . Если  $\varphi = 90^\circ$ , то плоскости называются перпендикулярными. В этом случае каждый из четырёх двугранных углов, образованных пересекающимися плоскостями, прямой.

3. Доказать теорему, выражающую признак перпендикулярности двух плоскостей. Доказательство теоремы можно провести устно по тексту учебника, используя рисунок 62. Приведённое в учебнике традиционное доказательство, как правило, успешно усваивается учащимися.

4. Важно обратить внимание учащихся на следующие два факта, часто используемые при решении задач:

а) Плоскость, перпендикулярная к ребру двугранного угла, перпендикулярна к его граням. (Это утверждение в несколько иной формулировке приведено в п. 23 учебника в виде следствия из теоремы.)

б) Перпендикуляр, проведённый из любой точки одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей к линии их пересечения, есть перпендикуляр к другой плоскости. (Это утверждение доказано в приведённом в учебнике решении задачи 178.)

5. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 171—180.

**Задача 171.** Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости  $\alpha$ , а катет наклонён к этой плоскости под углом  $30^\circ$ . Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью треугольника.

Решение.

1) Пусть  $\triangle ABC$  — данный треугольник,  $AB \subset \alpha$ ,  $CO \perp \alpha$ . Тогда отрезок  $OB$  — проекция катета  $CB$  на плоскость  $\alpha$ . По условию задачи  $\angle CBO = 30^\circ$  (рис. 2.23).

2) Пусть в треугольнике  $COB$   $CO = a$ , тогда  $CB = 2a$ .

3) Проведём  $CD \perp AB$ , тогда  $AB \perp DO$  по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах, и  $\angle CDO$  — линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскости  $\alpha$  с плоскостью треугольника. Пусть  $\angle CDO = x$ .

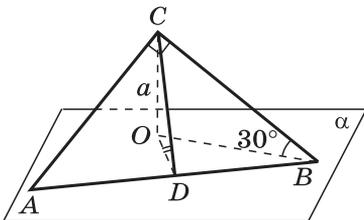


Рис. 2.23

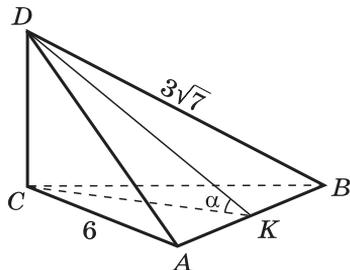


Рис. 2.24

Это и есть искомый угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью треугольника.

4) Из  $\triangle CDB$  получаем  $\angle CBD = 45^\circ$ , так как по условию треугольник  $ACB$  равнобедренный и прямоугольный. Поэтому  $CD = CB \cdot \sin 45^\circ$ ,  $CD = 2a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$ .

5) Из  $\triangle CDO$  имеем  $\sin x = \frac{CO}{CD}$ ,  $\sin x = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $x = 45^\circ$ .  
 Ответ:  $45^\circ$ .

**Задача 173.** Ребро  $CD$  тетраэдра  $ABCD$  перпендикулярно к плоскости  $ABC$ ,  $AB = BC = AC = 6$ ,  $BD = 3\sqrt{7}$ . Найдите двугранные углы  $DACB$ ,  $DABC$ ,  $BDCA$ .

Решение.

1) Так как  $DC \perp \overline{ABC}$ , то  $DCA \perp ABC$  по признаку перпендикулярности двух плоскостей (рис. 2.24). Следовательно, двугранный угол при ребре  $AC$ , т. е. двугранный угол  $DACB$ , прямой.

2) Проведём  $CK \perp AB$ , тогда  $AB \perp DK$  по теореме о трёх перпендикулярах, и, следовательно,  $\angle DKC$  — линейный угол двугранного угла при ребре  $AB$  тетраэдра. Из  $\triangle ACK$  получаем  $CK = AC \cdot \sin 60^\circ$ ,  $CK = 3\sqrt{3}$ .

3) Из  $\triangle BDK$  имеем  $BK = 3$ ,  $DK = \sqrt{BD^2 - BK^2}$ ,  $DK = \sqrt{63 - 9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ .

4) Пусть  $\angle CKD = \alpha$ , тогда  $\frac{CK}{DK} = \cos \alpha$ ,  $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , откуда  $\alpha = 45^\circ$ , т. е. двугранный угол  $DABC$  равен  $45^\circ$ .

5) Так как  $BC \perp DC$  и  $AC \perp DC$ , то  $\angle ACB$  — линейный угол двугранного угла  $BDCA$ .

Поскольку  $\angle ACB = 60^\circ$ , то двугранный угол  $BDCA$  равен  $60^\circ$ .

Ответ:  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ .

**Задача 174.** Найдите двугранный угол  $ABCD$  тетраэдра  $ABCD$ , если углы  $DAB$ ,  $DAC$  и  $ACB$  прямые,  $AC = CB = 5$ ,  $DB = 5\sqrt{5}$ .

Решение.

1) По условию задачи углы  $DAB$  и  $DAC$  прямые, следовательно,  $DA \perp AB$  и  $DA \perp AC$  (рис. 2.25). Отсюда следует, что отрезок  $DA$  — перпендикуляр к плоскости  $ABC$ , и, следовательно, отрезок  $AC$  — проекция наклонной  $DC$  на плоскость  $ABC$ .

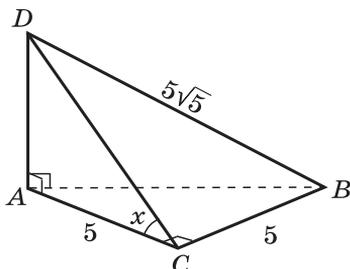


Рис. 2.25

2) По условию задачи угол  $ACB$  прямой, т. е.  $BC \perp AC$ , и, следовательно,  $BC \perp DC$  по теореме о трёх перпендикулярах. Таким образом,  $\angle ACD$  — линейный угол двугранного угла  $ABCD$ .

3) Из  $\triangle DCB$ :  $DC = \sqrt{DB^2 - BC^2}$ ,  $DC = \sqrt{25 \cdot 5 - 25} = 10$ .

4) Из  $\triangle DAC$  получаем  $\angle ACD = x$ ,  $\cos x = \frac{AC}{DC}$ ,  $\cos x = \frac{5}{10}$ , откуда  $x = 60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$ .

## Урок № 39

### Тема урока: Прямоугольный параллелепипед

#### Основные задачи урока

Ввести понятие прямоугольного параллелепипеда, рассмотреть свойства его граней, двугранных углов, диагоналей.

#### Примерный план проведения урока

1. Сформулировать определение прямоугольного параллелепипеда. Доказать, что все шесть граней прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники.

2. Доказать, что все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда прямые.

3. Доказать теорему: квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Обратить внимание на аналогию со свойством диагонали прямоугольника. Можно отметить также, что эта теорема является одним из вариантов пространственной теоремы Пифагора.

Рассмотреть следствие из теоремы: диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

4. Для классной и домашней работы можно использовать выборочно задачи 187—192.

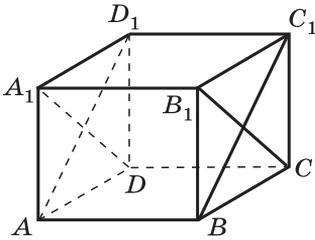


Рис. 2.26

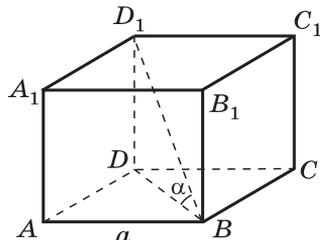


Рис. 2.27

**Задача 191.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что плоскости  $ABC_1$  и  $A_1 B_1 D$  перпендикулярны.

Решение.

1)  $BC_1 \perp B_1 C$  по свойству диагоналей квадрата (рис. 2.26).  $DC \perp BCC_1$ , поэтому  $DC \perp BC_1$ , так как  $BC_1 \subset BCC_1$ .

Таким образом, прямая  $BC_1$  перпендикулярна к двум пересекающимся прямым  $DC$  и  $CB_1$ , лежащим в плоскости  $A_1 B_1 D$ . Следовательно, прямая  $BC_1$  перпендикулярна к плоскости  $A_1 B_1 D$  по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

2) Плоскость  $ABC_1$  проходит через прямую  $BC_1$ , перпендикулярную к плоскости  $A_1 B_1 D$ , следовательно,  $ABC_1 \perp A_1 B_1 D$  по признаку перпендикулярности двух плоскостей.

**Задача 192.** Найдите тангенс угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.

Решение.

1) Пусть ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равно  $a$ . Тогда  $BD = a\sqrt{2}$  (рис. 2.27). Так как  $D_1 D \perp ABC$ , то прямая  $BD$  является проекцией прямой  $BD_1$  на плоскость грани  $ABCD$ , и поэтому угол между этими прямыми есть угол между диагональю  $BD_1$  и гранью  $ABCD$ . Таким образом, требуется найти тангенс угла  $D_1 B D$ , величину которого обозначим  $\alpha$ .

2) Из  $\triangle D_1 D B$  получаем  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{D_1 D}{BD}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

## Урок № 40

### Тема урока: Решение задач на прямоугольный параллелепипед

#### Основные задачи урока

Повторить свойства прямоугольного параллелепипеда, решить ряд задач на прямоугольный параллелепипед.

### Примерный план проведения урока

1. Повторить вопросы теории путём опроса учащихся.
2. Проверить выборочно решения задач из домашней работы, используя готовые чертежи, слайды.
3. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 193—196.

**Задача 195.** Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , если  $AC_1 = 12$  см и диагональ  $BD_1$  составляет с плоскостью грани  $AA_1 D_1 D$  угол в  $30^\circ$ , а с ребром  $DD_1$  — угол в  $45^\circ$ .

Решение.

1) Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны, следовательно,

$BD_1 = AC_1 = 12$  см (рис. 2.28).

2)  $AB \perp ADD_1$ , поэтому отрезок  $AD_1$  — проекция диагонали  $BD_1$  на плоскость грани  $AA_1 D_1 D$ , и, следовательно,  $\angle AD_1 B = 30^\circ$ .

3) Из  $\triangle ABD_1$  получаем  $AB = 6$  см (по свойству катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ).

4) Из  $\triangle DD_1 B$  имеем  $DB = D_1 B \cdot \sin 45^\circ$ ,  $DB = 6\sqrt{2}$  см,  $DD_1 = D_1 B \cdot \cos 45^\circ = 6\sqrt{2}$  см.

5) Из  $\triangle ADB$  получаем  $AD = \sqrt{DB^2 - AB^2}$ ,  $AD = \sqrt{72 - 36}$  см  $= \sqrt{36}$  см  $= 6$  см.

Ответ: 6 см, 6 см,  $6\sqrt{2}$  см.

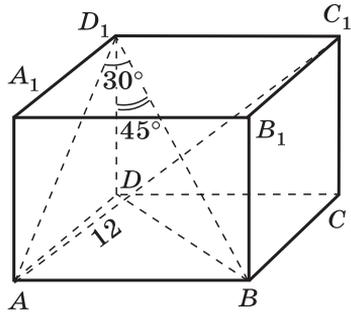


Рис. 2.28

### Уроки № 41—42

#### Тема уроков: Повторение теории и решение задач на перпендикулярность прямых и плоскостей

##### Основные задачи уроков

Повторить некоторые вопросы теории путём опроса учащихся: признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорему о трёх перпендикулярах, признак перпендикулярности двух плоскостей и др.; решить задачи, близкие по содержанию к задачам, включённым в карточки к зачёту.

##### Примерный план проведения уроков

1. Проверить выборочно решение задач из домашней работы.

2. Повторить основные вопросы теории: признак перпендикулярности прямой и плоскости и др. С этой целью использовать также вопросы к главе II.

3. Решить выборочно задачи из § 1, 2, 3. Можно использовать дополнительные задачи 201, 204, 212, 216 и др.

Целесообразно использовать слайды 2.7, 2.8 в основном для обсуждения подходов к решению задач, для нахождения некоторых промежуточных величин в ходе решения задач.

**Задача 204.** Прямая  $OM$  перпендикулярна к плоскости правильного треугольника  $ABC$  и проходит через центр  $O$  этого треугольника,  $OM = a$ ,  $\angle MCO = \varphi$ . Найдите:

а) расстояние от точки  $M$  до каждой из вершин треугольника  $ABC$  и до прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ ;

б) длину окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ;

в) площадь треугольника  $ABC$ .

Решение.

а) 1) Проведём высоты  $AD$ ,  $BK$  и  $CE$  треугольника  $ABC$ . Они пересекаются в точке  $O$  — центре треугольника (рис. 2.29).

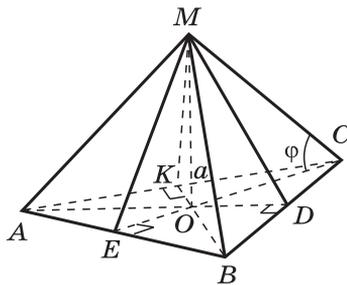


Рис. 2.29

Так как  $OA = OB = OC$ , то  $\triangle MAO = \triangle MBO = \triangle MCO$  (по двум катетам), поэтому  $MA = MB = MC$ .

2) Из  $\triangle MCO$  имеем  $\frac{MO}{MC} = \sin \varphi$ ,  $MC = \frac{a}{\sin \varphi}$ ,  $\frac{MO}{OC} = \operatorname{tg} \varphi$ ,  $OC = \frac{a}{\operatorname{tg} \varphi}$ .

3)  $OD = OK = OE = \frac{OC}{2}$ ,  $OD = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \varphi}$ .  $\triangle MOD = \triangle MOK = \triangle MOE$  по двум катетам, поэтому  $MD = MK = ME$ .

4) Так как  $OD$  — проекция  $MD$  на плоскость  $ABC$  и  $OD \perp BC$ , то  $MD \perp BC$  (по теореме о трёх перпендикулярах), и, следовательно, расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB$  равно  $MD$ . Из  $\triangle MOD$  получаем

$$MD = \sqrt{MO^2 + OD^2},$$

$$MD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4 \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \varphi} \cdot \sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

б) Длина окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , вычисляется по формуле  $l = 2\pi R$ , где  $R = OC$ , поэтому  $l = \frac{2\pi a}{\operatorname{tg} \varphi}$ .

в) Площадь  $\triangle ABC$  вычисляется по формуле

$$S = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Так как  $AB = OC \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \varphi}$ , то  $S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4 \operatorname{tg}^2 \varphi}$ .

Ответ: а)  $\frac{a}{\sin \varphi}$ ,  $\frac{a}{2 \operatorname{tg} \varphi} \cdot \sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \varphi}$ ; б)  $\frac{2\pi a}{\operatorname{tg} \varphi}$ ; в)  $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4 \operatorname{tg}^2 \varphi}$ .

**Задача 212.** Точка  $C$  является проекцией точки  $D$  на плоскость треугольника  $ABC$ . Докажите, что площадь треугольника  $ABD$  равна  $\frac{S}{\cos \alpha}$ , где  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ , а  $\alpha$  — угол между плоскостями  $ABC$  и  $ABD$ .

Решение.

1) Проведём высоту  $DK$  треугольника  $ABD$  и соединим отрезком точки  $K$  и  $C$  (рис. 2.30). Тогда  $CK \perp AB$  по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах, а  $\angle CKD$  — линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей  $ABC$  и  $ABD$ .

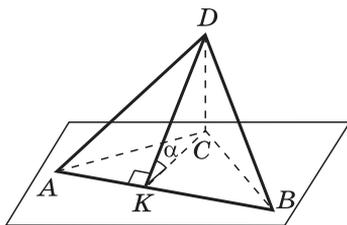


Рис. 2.30

2) По условию задачи  $\angle CKD = \alpha$ .

$$S = S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CK, \quad S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DK.$$

Из  $\triangle DKC$  получаем  $CK = DK \cdot \cos \alpha$ ,  $DK = \frac{CK}{\cos \alpha}$ . Поэтому

$$\text{Или } S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{CK}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot CK}{\cos \alpha}, \quad \text{или } S_{ABD} = \frac{S}{\cos \alpha}.$$

### Площадь проекции треугольника

2.7

Дано:  $\triangle ABC$ :  $AB = 21$ ,  $AC = 10$ ,  $BC = 17$ ,  $AC \subset \alpha$ . Двугранный угол  $BACO$  равен  $60^\circ$ ,  $\triangle AOC$  — проекция треугольника  $ABC$  на плоскость  $\alpha$ . Найдите  $S_{AOC}$ .

1.  $21^2 > 17^2 + 10^2$ . Поэтому

$\triangle ABC$  тупоугольный.

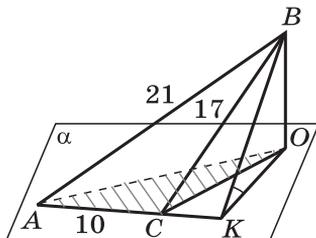
2. Объясните, как построить

$\triangle AOC$ .

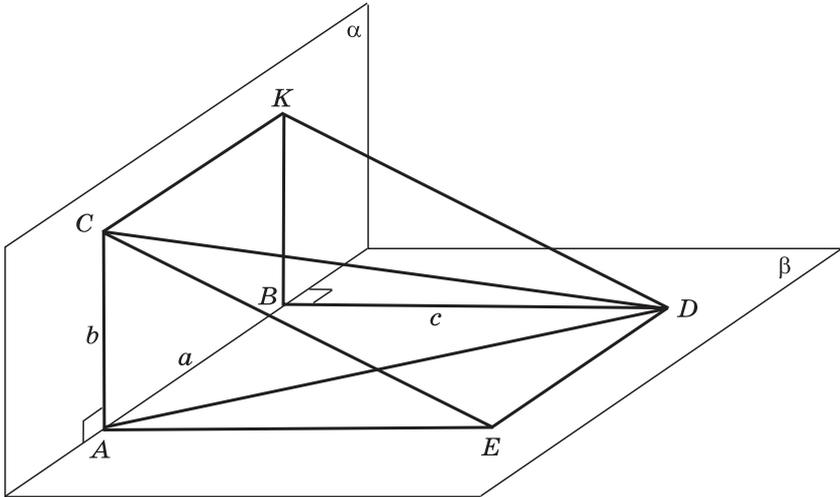
3. Объясните, как построить линейный угол двугранного угла  $BACO$ .

4.  $S_{ABC} = 84$ .

5.  $S_{AOC} = 42$ .



Точки  $A$  и  $B$  лежат на ребре прямого двугранного угла. Отрезки  $AC$  и  $BD$  проведены в разных гранях перпендикулярно к ребру двугранного угла:  $AB = a$ ,  $AC = b$ ,  $BD = c$ .



1. Объясните, как построить линейный угол двугранного угла.
2. Укажите различные способы вычисления длины отрезка  $CD$ .
3. Найдите длину отрезка  $CD$ .

**Задача 216.** Точки  $A$  и  $B$  лежат на ребре данного двугранного угла, равного  $120^\circ$ . Отрезки  $AC$  и  $BD$  проведены в разных гранях и перпендикулярны к ребру двугранного угла. Найдите отрезок  $CD$ , если  $AB = AC = BD = a$ .

Решение.

1) Проведём  $DK \parallel AB$  и  $AK \parallel BD$  (рис. 2.31), тогда  $AK \perp AB$ ,  $AK = KD = a$ . Так как  $AC \perp AB$  и  $AK \perp AB$ , то  $\angle CAK$  — линейный угол двугранного угла, и поэтому  $\angle CAK = 120^\circ$ .

2) Из  $\triangle CAK$  по теореме косинусов получаем

$$CK^2 = AC^2 + AK^2 - 2 \cdot AC \cdot AK \cdot \cos 120^\circ,$$

$$CK^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2.$$

3) Так как  $AB \perp CAK$  (ребро перпендикулярно к плоскости линейного угла) и  $DK \parallel AB$ , то  $DK \perp CAK$ , и, сле-

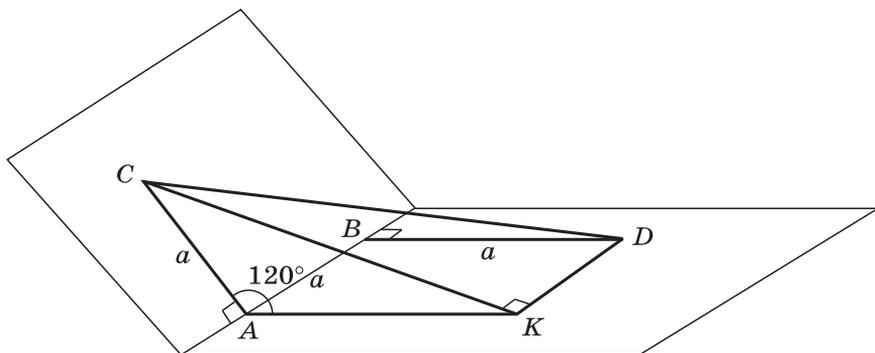


Рис. 2.31

довательно,  $DK \perp CK$ . Поэтому треугольник  $CKD$  прямоугольный. Из  $\triangle CKD$  получаем  $CD^2 = CK^2 + KD^2$ ,  $CD^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$ ,  $CD = 2a$ .

Ответ:  $2a$ .

В классах с углублённым изучением математики можно рассмотреть также пункты 25\* и 26\* и решить следующие задачи.

**Задача 1.** Луч  $OM$  лежит внутри трёхгранного угла  $OABC$ . Докажите, что сумма плоских углов трёхгранного угла  $OABC$  больше суммы плоских углов трёхгранного угла  $OABM$ .

**Задача 2.** Все плоские углы трёхгранного угла прямые. Найдите величины двугранных углов этого трёхгранного угла. (Ответ:  $90^\circ$ .)

**Задача 3.** Каждый плоский угол трёхгранного угла равен  $60^\circ$ . На одном из рёбер взята точка на расстоянии  $3m$  от вершины угла. Найдите расстояние от этой точки до противоположной грани. (Ответ:  $m\sqrt{6}$ .)

## Урок № 43

### Контрольная работа № 2.1

#### Вариант 1

1. Диагональ куба равна 6 см. Найдите:

а) ребро куба;

б) косинус угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.

2. Сторона  $AB$  ромба  $ABCD$  равна  $a$ , один из углов ромба равен  $60^\circ$ . Через сторону  $AB$  проведена плоскость  $\alpha$  на расстоянии  $\frac{a}{2}$  от точки  $D$ .

- а)<sup>0</sup> Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\alpha$ .  
 б)<sup>0</sup> Покажите на рисунке линейный угол двугранного угла  $DABM$ ,  $M \in \alpha$ .  
 в) Найдите синус угла между плоскостью ромба и плоскостью  $\alpha$ .

### Вариант 2

1. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат, диагональ параллелепипеда равна  $2\sqrt{6}$  см, а его измерения относятся как  $1:1:2$ . Найдите:

- а)<sup>0</sup> измерения параллелепипеда;  
 б)<sup>0</sup> синус угла между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.

2. Сторона квадрата  $ABCD$  равна  $a$ . Через сторону  $AD$  проведена плоскость  $\alpha$  на расстоянии  $\frac{a}{2}$  от точки  $B$ .

- а)<sup>0</sup> Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\alpha$ .  
 б)<sup>0</sup> Покажите на рисунке линейный угол двугранного угла  $BADM$ ,  $M \in \alpha$ .  
 в) Найдите синус угла между плоскостью квадрата и плоскостью  $\alpha$ .

### Ответы:

Вариант 1. 1. а)  $2\sqrt{3}$  см; б)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

2. а)  $\frac{a}{2}$ ; в)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Вариант 2. 1. а) 2 см, 2 см, 4 см; б)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

2. а)  $\frac{a}{2}$ ; в)  $30^\circ$ .

## Урок № 44

### Зачёт № 2. Перпендикулярность прямых и плоскостей

#### Карточка 1

- Сформулируйте определение перпендикулярности прямой и плоскости. Докажите теорему, выражающую признак перпендикулярности прямой и плоскости.
- Решите одну из задач: 131 или 216.

#### Карточка 2

- Докажите теоремы, устанавливающие связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.
- Решите одну из задач: 143 или 213.

### **Карточка 3**

1. Докажите теорему о трёх перпендикулярах.
2. Решите одну из задач: 150 или 212.

### **Карточка 4**

1. Сформулируйте определение угла между прямой и плоскостью. Расскажите о свойстве угла между прямой и плоскостью.
2. Решите одну из задач: 157 или 206.

### **Карточка 5**

1. Сформулируйте определение перпендикулярности двух плоскостей. Докажите теорему, выражающую признак перпендикулярности двух плоскостей.
2. Решите одну из задач: 171 или 202.

### **Карточка 6**

1. Докажите теорему о диагонали прямоугольного параллелепипеда.
2. Решите одну из задач: 195 или 197.

## § 1. ПОНЯТИЕ МНОГОГРАННИКА. ПРИЗМА

## Урок № 45

## Тема урока: Понятие многогранника. Призма

## Основные задачи урока

Ввести понятия многогранника, его элементов, выпуклого и невыпуклого многогранников, призмы.

## Примерный план проведения урока

1. Напомнить известные учащимся понятия тетраэдра и параллелепипеда. Подчеркнуть, что каждая из этих поверхностей ограничивает некоторое геометрическое тело, отделяет это тело от остальной части пространства. Такое наглядное представление о геометрических телах вполне достаточно для учащихся на первичном уровне рассмотрения этого понятия. Ниже, в п. 28, рассматривается определение геометрического тела, в связи с чем вводится ряд новых понятий. Этот материал могут прочитать самостоятельно наиболее подготовленные учащиеся, проявляющие повышенный интерес к математике.

2. Используя модели многогранников (куба, параллелепипеда, тетраэдра, призмы и др.), назвать их элементы: грани, рёбра, вершины, диагонали граней и диагонали многогранника. Важно, чтобы учащиеся усвоили эти понятия, что позволит правильно понимать формулировки задач, в процессе их решения не смешивать названия различных элементов.

3. С помощью рисунков 70—72 учебника ввести понятия выпуклого и невыпуклого многогранников.

4. Призма  $A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_n$  определяется как многогранник, составленный из двух равных многоугольников  $A_1A_2\dots A_n$  и  $B_1B_2\dots B_n$ , расположенных в параллельных плоскостях, и  $n$  параллелограммов  $A_1A_2B_2B_1, \dots, A_nA_1B_1B_n$ . Таким образом, одной из пар противоположных сторон этих параллелограммов служат соответственные стороны равных многоугольников.

5. Используя рисунки 76, 77 учебника, ввести элементы призмы: основания, боковые грани, боковые рёбра и стороны основания, высота призмы.

6. С помощью моделей разъяснить понятия: прямая призма, наклонная призма, правильная призма.

7. Обратить внимание учащихся на то, что знакомый им параллелепипед — это четырёхугольная призма.

У произвольного параллелепипеда все шесть граней — параллелограммы, у прямого параллелепипеда основания — параллелограммы, а боковые грани — прямоугольники, у прямоугольного параллелепипеда все шесть граней — прямоугольники.

8. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 218—225.

В процессе решения задач можно применять символическую запись  $(a, \hat{\alpha})$  — величина угла между прямой  $a$  и плоскостью  $\alpha$ ,  $(\alpha, \hat{\beta})$  — величина угла между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

### Задача 219.

Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед,  $AB = 12$  см,  $AD = 5$  см,  $(D_1 \hat{B}, ABC) = 45^\circ$ .

Найти  $DD_1$ .

Решение.

1) Из  $\triangle ABD$  имеем  $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$ ,  $BD = \sqrt{12^2 + 5^2}$  см =  $\sqrt{169}$  см = 13 см (рис. 3.1).

2)  $D_1 D \perp ADC$ ,  $BD$  — проекция диагонали  $BD_1$  на плоскость  $ADC$ , поэтому  $\angle D_1 B D$  — угол между диагональю  $BD_1$  и плоскостью основания:  $\angle D_1 B D = 45^\circ$ .  $\triangle D_1 B D$  прямоугольный и равнобедренный:  $D_1 D = DB = 13$  см.

Ответ: 13 см.

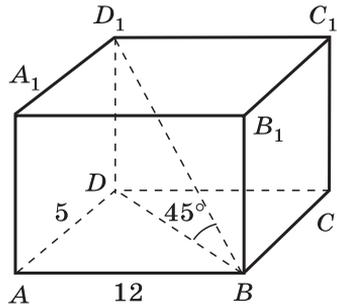


Рис. 3.1

**Задача 223.** Через два противоположных ребра куба проведено сечение, площадь которого равна  $64\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>. Найдите ребро куба и его диагональ.

Решение.

1) Пусть  $AB = BC = a$ , тогда  $BC_1 = a\sqrt{2}$ .

2)  $BA \perp AD$  и  $BA \perp AA_1$ , следовательно,  $BA$  перпендикулярно к плоскости грани  $ADD_1 A_1$ , и поэтому  $BA \perp AD_1$  (рис. 3.2).

Сечение  $ABC_1 D_1$  — прямоугольник.  $S_{ABC_1 D_1} = AB \cdot BC_1$ , т. е.  $a \cdot a\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>, откуда  $a^2 = 64$  см<sup>2</sup>,  $a = 8$  см.

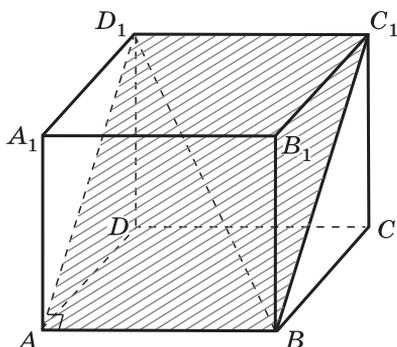


Рис. 3.2

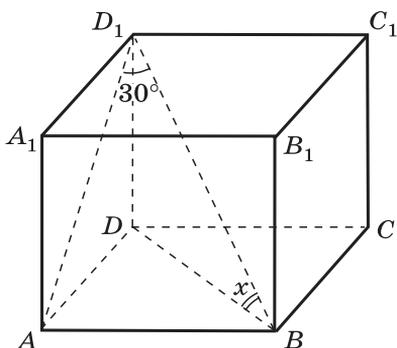


Рис. 3.3

3)  $BD_1^2 = 3a^2$  (по теореме о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда),  $BD_1^2 = 3 \cdot 8^2 \text{ см}^2$ ,  $BD_1 = 8\sqrt{3} \text{ см}$ .  
 Ответ:  $AB = 8 \text{ см}$ ,  $BD_1 = 8\sqrt{3} \text{ см}$ .

**Задача 225.**

Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — правильная четырёхугольная призма,  $\widehat{(BD_1, ADD_1)} = 30^\circ$ .

Найти  $\widehat{(BD_1, ABC)}$ .

Решение.

1)  $AB \perp ADD_1$ , следовательно,  $AD_1$  — проекция диагонали  $BD_1$  на плоскость грани  $ADD_1 A_1$ , поэтому  $\angle AD_1 B$  — угол между диагональю  $BD_1$  и плоскостью этой грани (рис. 3.3).  $\angle AD_1 B = 30^\circ$ .

2) Отрезок  $BD$  — проекция диагонали  $BD_1$  на плоскость основания призмы, поэтому  $\angle D_1 B D = x$  — искомый угол между диагональю призмы и плоскостью основания.

3) Пусть  $AB = a$ , тогда  $BD = a\sqrt{2}$ . Из  $\triangle ABD_1$  получаем  $BD_1 = 2a$  (по свойству катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ).

4) Из  $\triangle D_1 D B$  имеем  $\cos x = \frac{BD}{BD_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x = 45^\circ$ .

Ответ:  $45^\circ$ .

## Урок № 46

### Тема урока: Площадь поверхности призмы

#### Основные задачи урока

Доказать теорему о площади боковой поверхности прямой призмы, выработать навыки решения задач на вычисление площадей полной и боковой поверхностей призмы.

### Примерный план проведения урока

1. Проверить выборочно выполнение домашнего задания, умение решать задачи типа 220, 221, 224. Желательно использовать заранее подготовленные решения задач.

2. Доказать теорему о площади боковой поверхности прямой призмы. Полезно сделать записи, которые помогут учащимся усвоить доказательство теоремы, приведённое в учебнике.

Обозначим длины сторон основания прямой  $n$ -угольной призмы через  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , высоту — буквой  $h$ .

Тогда

$$S_{\text{бок}} = a_1 h + a_2 h + \dots + a_n h = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) h = p \cdot h,$$

где  $p$  — периметр основания призмы.

3. Показать применение формул полной и боковой поверхностей призмы при решении задач.

Для классной и домашней работы можно использовать задачи 229а — г, 230, 231, 232.

Для работы на уроке — задачи 229а, 230.

#### Задача 230.

Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма,  $AB = 5$  см,  $BC = 3$  см,  $\angle ABC = 120^\circ$ . Наибольшая из площадей боковых граней равна  $35$  см<sup>2</sup>.

Найти  $S_{\text{бок}}$ .

Решение.

1) Из треугольника  $ABC$  находим ребро  $AC$  по теореме косинусов:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ$ ,  $AC^2 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$  см<sup>2</sup>,  $AC = 7$  см (рис. 3.4).

2) Отрезок  $AC$  — большая сторона треугольника  $ABC$ , следовательно,  $ACC_1A_1$  — большая боковая грань призмы. Поэтому  $AC \cdot CC_1 = 35$  см<sup>2</sup>, или  $7 \cdot h = 35$  см<sup>2</sup>, откуда  $h = 5$  см.

3)  $S_{\text{бок}} = p \cdot h$ ,

$$S_{\text{бок}} = (5 + 3 + 7) \cdot 5 \text{ см}^2 = 75 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $75$  см<sup>2</sup>.

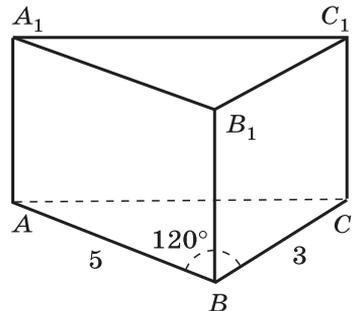


Рис. 3.4

## Уроки № 47—48

### Тема уроков: Повторение теории, решение задач на вычисление площади поверхности призмы

#### Основные задачи уроков

Повторить определения призмы, её элементов, вывод формулы площади боковой поверхности прямой призмы, продолжить формирование навыков решения задач.

#### Примерный план проведения уроков

1. Повторить вопросы теории путём фронтальной беседы и опроса учащихся: определения призмы и параллелепипеда, их элементов, вывод формулы площади боковой поверхности прямой призмы.

2. Решить задачи 226, 227, 228, 233, 234, 236—238.

3. Задачи 232, 235 и ряд дополнительных задач к главе использовать в индивидуальной работе с учащимися, проявляющими повышенный интерес к математике, на спецкурсе.

4. Полезно использовать на уроках слайды 3.1—3.5. Это поможет учителю экономно расходовать время при обсуждении подходов к решению задач.

5. С целью проверки навыков решения основных типов задач провести самостоятельную работу.

### 3.1

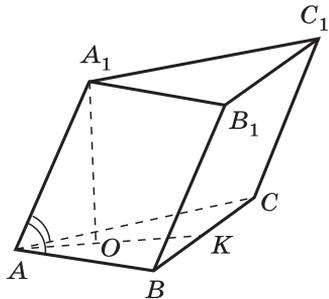
**Задача.** Основание призмы — правильный треугольник  $ABC$ . Боковое ребро  $AA_1$  образует равные острые углы со сторонами основания  $AB$  и  $AC$ .

Докажите, что: а)  $BC \perp AA_1$ ; б) грань  $BB_1C_1C$  — прямоугольник.

**Решение.**

а) Так как  $AA_1$  образует равные острые углы со сторонами  $AB$  и  $AC$ , то проекцией ребра  $AA_1$  на плоскость  $ABC$  является отрезок  $AO$  биссектрисы угла  $BAC$ .  $BC \perp AO$ , следовательно,  $BC \perp AA_1$  по теореме о трёх перпендикулярах.

б)  $BC \perp AA_1$ ,  $AA_1 \parallel BB_1$ , поэтому  $BC \perp BB_1$ , и значит,  $BB_1C_1C$  — прямоугольник.



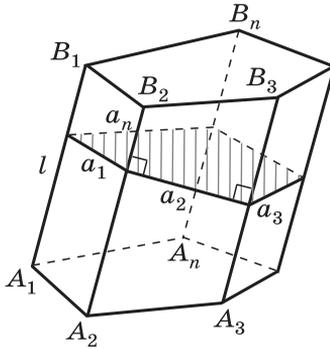
Докажите, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

**Доказательство.**

Плоскость перпендикулярного сечения призмы перпендикулярна к боковым рёбрам, поэтому стороны перпендикулярного сечения призмы являются высотами параллелограммов.

$$S_{\text{бок}} = a_1 l + a_2 l + \dots + a_n l,$$

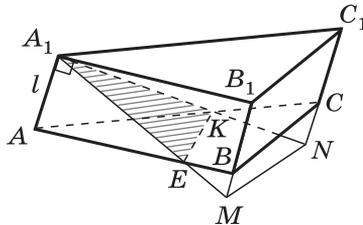
$$S_{\text{бок}} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) l, \quad S_{\text{бок}} = P_{\perp} \cdot l.$$



**Задача.**  $ABCA_1B_1C_1$  — треугольная призма. Секущая плоскость  $\alpha$  пересекает продолжения боковых рёбер  $B_1B$  и  $C_1C$  в точках  $M$  и  $N$ ,  $\alpha \perp AA_1$ .

Сечение призмы плоскостью  $\alpha$  есть треугольник  $A_1EK$ . За перпендикулярное сечение призмы принимается треугольник  $A_1MN$ . Докажите, что  $S_{\text{бок}} = P_{\perp} \cdot l$ , т. е.

$$S_{\text{бок}} = (A_1M + A_1N + MN) \cdot AA_1.$$

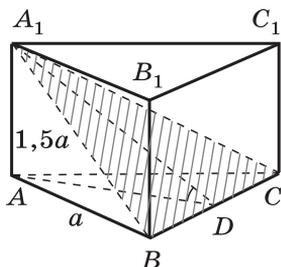


## 3.4

**Задача.** Сторона основания правильной треугольной призмы равна  $a$ , высота призмы равна  $1,5a$ . Через сторону основания и противоположную вершину другого основания проведено сечение.

Найдите:

1. Площадь боковой поверхности призмы.
2. Высоту основания призмы.
3. Угол между плоскостями основания и сечения.
4. Отношение площадей основания и сечения призмы.

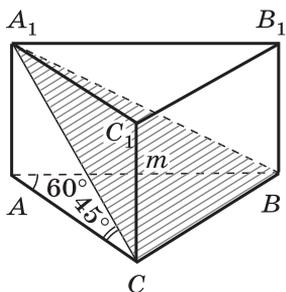


Ответ: 1.  $4,5a^2$ . 2.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .  
3.  $60^\circ$ . 4.  $\frac{1}{2}$ .

## 3.5

**Задача.** Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна  $m$ , а острый угол равен  $60^\circ$ . Через катет, противолежащий этому углу, и противоположную этому катету вершину другого основания проведено сечение, составляющее угол  $45^\circ$  с плоскостью основания.

1. Докажите, что треугольник  $A_1CB$  прямоугольный.
2. Укажите различные способы вычисления площадей основания и сечения призмы.
3. Вычислите площадь основания призмы.
4. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.



Ответ: 3.  $\frac{m^2\sqrt{3}}{8}$ .  
4.  $\frac{m^2(3+\sqrt{3})}{4}$ .

## Самостоятельная работа № 3.1

### Вариант 1

Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна  $a$ , диагональ призмы образует с плоскостью основания угол в  $45^\circ$ . Найдите:

- а)<sup>0</sup> диагональ призмы;
- б)<sup>0</sup> угол между диагональю призмы и плоскостью боковой грани;
- в)<sup>0</sup> площадь боковой поверхности призмы;
- г) площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания.

### Вариант 2

Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна  $a$  и образует с плоскостью боковой грани угол в  $30^\circ$ . Найдите:

- а)<sup>0</sup> сторону основания призмы;
- б)<sup>0</sup> угол между диагональю призмы и плоскостью основания;
- в)<sup>0</sup> площадь боковой поверхности призмы;
- г) площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через диагональ основания параллельно диагонали призмы.

### Ответы:

Вариант 1. а)  $2a$ ; б)  $30^\circ$ ; в)  $4a^2\sqrt{2}$ ; г)  $a^2\sqrt{3}$ .

Вариант 2. а)  $\frac{a}{2}$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $a^2\sqrt{2}$ ; г)  $\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$ .

В классах с углублённым изучением математики на одном из уроков целесообразно вывести формулу площади прямоугольной проекции многоугольника, а затем с её помощью доказать пространственную теорему Пифагора (п. 31\* учебника).

## § 2. ПИРАМИДА

### Урок № 49

#### Тема урока: Пирамида. Правильная пирамида

#### Основные задачи урока

Ввести понятие пирамиды, доказать теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды, рассмотреть задачи, связанные с пирамидой.

## Примерный план проведения урока

1. Ввести понятия пирамиды, её элементов: основание, боковые грани, вершина, боковые рёбра, высота.

2. Ввести понятие правильной пирамиды, акцентировав внимание учащихся на двух моментах: основание пирамиды — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром её основания, является высотой пирамиды.

3. Используя рисунок 82 учебника, доказать устно, что боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники.

4. Ввести понятие апофемы правильной пирамиды. Это высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины. Подчеркнуть, что этот термин употребляется только для правильной пирамиды, хотя у неправильной пирамиды также могут быть равны высоты боковых граней.

5. Доказать теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды, опираясь на текст учебника.

Полезна символическая запись доказательства:

Пусть сторона основания правильной пирамиды равна  $a$ , апофема равна  $d$ .  $S_{\Delta}$  — площадь боковой грани. Тогда  $S_{\text{бок}} = n \cdot S_{\Delta} = n \cdot \frac{1}{2} ad = \frac{1}{2} (n \cdot a) \cdot d$ , т. е.  $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} p \cdot d$ , где  $p$  — периметр основания пирамиды.

6. Рассмотреть задачи на вычисление элементов и площади поверхности пирамиды и в первую очередь решать задачи на правильную пирамиду.

Для классной и домашней работы можно использовать выборочно задачи 254—258.

### Задача 255.

Дано:  $MABC$  — правильная треугольная пирамида,  $AB = 8$  см,  $\angle BMC = \varphi$ ,  $MO$  — высота пирамиды.

Найти  $MO$ .

Решение.

1) Основание высоты  $MO$  (точка  $O$ ) — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ,  $AO = R$  — радиус этой окружности.  $AB = R\sqrt{3}$ ,  $R = AO = \frac{8}{\sqrt{3}}$  см,  $OD = \frac{AO}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$  см.

2) Из треугольника  $MBD$  имеем  $\frac{BD}{MD} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ ,  $MD = \frac{4}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$  см (рис. 3.5).

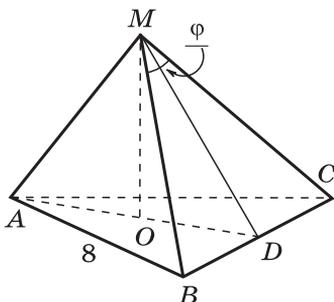


Рис. 3.5

3) Из  $\triangle MOD$  получаем

$$MO = \sqrt{MD^2 - OD^2} = \\ = \sqrt{\frac{16}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{16}{3}} \text{ см} = 4 \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{3}} \text{ см} = \frac{4}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} \text{ см.}$$

Ответ:  $\frac{4}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} \text{ см.}$

### Задача 256.

Дано:  $МАВСD$  — правильная четырёхугольная пирамида,  $AB = m$ ,  $\angle BMC = \alpha$ .

Найти:

- а)  $MO$  (высоту пирамиды);  
 б)  $MB$ ; в)  $(\widehat{MBC}, \widehat{ABC})$ ;  
 г)  $(\widehat{AMD}, \widehat{CMD})$ .

Решение.

а)  $ABCD$  — квадрат.  $OK = BK = \frac{m}{2}$ . Из  $\triangle MBK$  имеем  $\frac{BK}{MK} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ,  $MK = \frac{m}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$  (рис. 3.6). Из  $\triangle MOK$  получаем

$$MO = \sqrt{MK^2 - OK^2}, \\ MO = \sqrt{\frac{m^2}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{m^2}{4}} = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 1} = \frac{m \sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

б) Из  $\triangle MBK$  имеем  $\frac{BK}{MB} = \sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $MB = \frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ .

в)  $OK \perp BC$ ,  $MK \perp BC$ , поэтому  $\angle OKM$  — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями боковой грани  $MBC$  и основания пирамиды. Пусть  $\angle OKM = \beta$ , тогда  $\cos \beta = \frac{OK}{MK} = \frac{m}{2} : \frac{m}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ,  $\beta = \arccos \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$ .

г) Проведём  $OE \perp MD$ . Так как  $MD \perp OE$  и  $MD \perp AC$ , то  $MD \perp ACE$ , и, следовательно,  $\angle AEC$  — линейный угол двугранного угла при боковом ребре  $MD$ . Пусть  $\angle AEC = \gamma$ . Из  $\triangle MEC$  имеем  $\angle EMC = \alpha$ ,  $\frac{EC}{MC} = \sin \alpha$ ,  $EC = \frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \alpha = m \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$ .

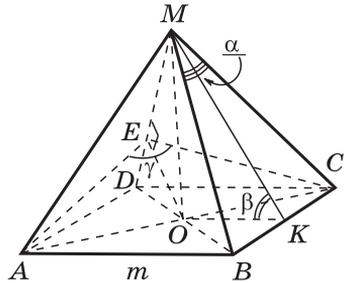


Рис. 3.6

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle OEC \text{ получаем } \frac{OC}{EC} = \sin \frac{\gamma}{2}, \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{m\sqrt{2}}{2} : m \cos \frac{\alpha}{2} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{\gamma}{2} = \arcsin \left( \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right), \quad \gamma = 2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ответ: а) } \frac{m\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}; \quad \text{б) } \frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}; \quad \text{в) } \arccos \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right); \\ \text{г) } 2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right). \end{aligned}$$

## Урок № 50

### Тема урока: Повторение теории, решение задач на правильную пирамиду

#### Основные задачи урока

Повторить доказательство теоремы о площади боковой поверхности правильной пирамиды, продолжить выработку навыков решения задач на правильную пирамиду.

#### Примерный план проведения урока

1. Повторить доказательство теоремы о площади боковой поверхности правильной пирамиды.

2. Проверить выборочно решения задач из домашней работы. Желательно при этом для экономии времени использовать готовые чертежи, слайды с решениями задач.

3. Решить выборочно задачи 257, 259—265.

Необходимо обратить внимание учащихся на качество выполнения рисунков к задачам. С этой целью полезно использовать приведённые ниже слайды 3.6—3.8 с изображениями фигур. Их использование поможет учителю обсудить устно в форме фронтальной беседы решения задач, повторить некоторые важные вопросы из ранее изученных разделов курса геометрии, поможет учащимся решить самостоятельно задачи 261, 262, 263.

**Задача 264.** Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если сторона её основания равна  $a$ , а площадь боковой грани равна площади сечения, проведённого через вершину пирамиды и большую диагональ основания.

Решение.

$$AB = a, \quad AD = 2a. \quad S_{\text{гр}} = \frac{1}{2} AB \cdot MK, \quad S_{MAD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MO$$

(рис. 3.7). По условию задачи  $\frac{1}{2} a \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot MO$ , откуда

$MK = 2MO$ , и, следовательно,  $\angle MKO = 30^\circ$ . Из  $\triangle AOK$  имеем  $OK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Из  $\triangle MOK$  получаем

$$MK = \frac{OK}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = a.$$

Таким образом,

$$S_{\text{бок}} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = 3a^2.$$

Ответ:  $3a^2$ .

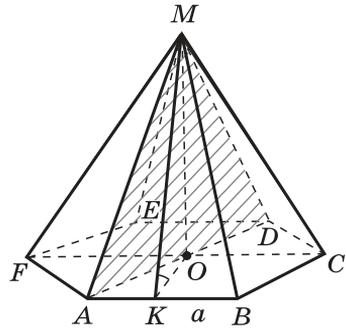


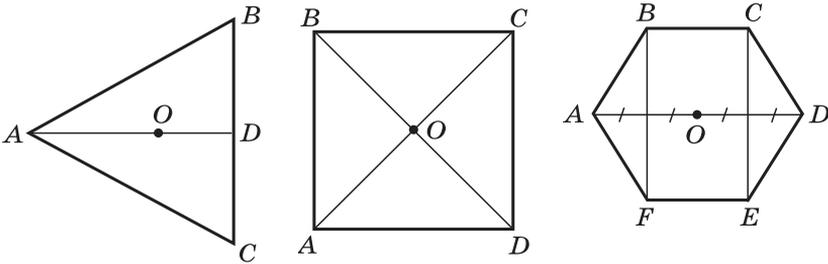
Рис. 3.7

**Изображение фигур**

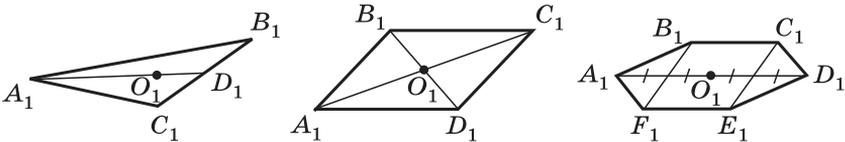
**3.6**

Опираясь на свойства параллельного проектирования, объясните вид проекций изображённых ниже правильных многоугольников и правильных пирамид.

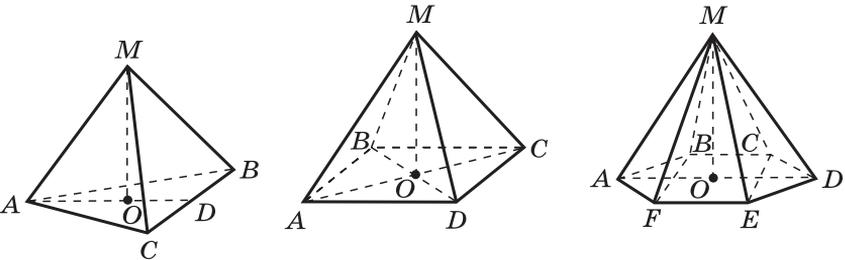
**Правильные многоугольники**



**Параллельные проекции многоугольников**



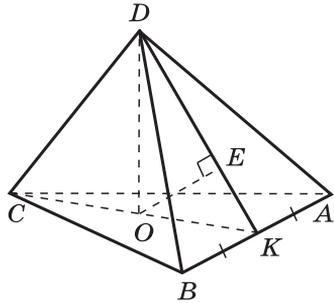
**Правильные пирамиды**



**Задача.**  $DABC$  — правильная треугольная пирамида.

Докажите, что:

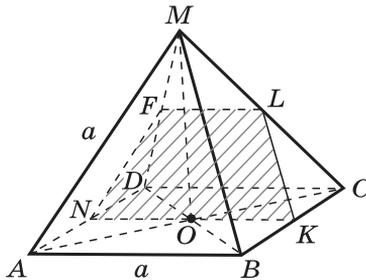
1. Скрещивающиеся рёбра  $DC$  и  $AB$  перпендикулярны.
2.  $AB \perp DCK$ .
3. Плоскости  $DAB$  и  $DCK$  перпендикулярны.
4. Перпендикуляр  $OE$  из точки  $O$  к апофеме  $DK$  является перпендикуляром к плоскости  $DAB$ .



Дополните подробным обоснованием приведённые записи:

1.  $AB \perp CO$ ,  $AB \perp DC$ .
2.  $AB \perp CK$ ,  $AB \perp DK$ ,  $AB \perp DCK$ .
3.  $AB \perp DCK$ ,  $AB \subset DAB$ ,  $DAB \perp DCK$ .
4.  $OE \perp DK$ ,  $OE \perp AB$ ,  $OE \perp DAB$ .

**Задача.** Каждое ребро правильной четырёхугольной пирамиды  $MABCD$  равно  $a$ . Через середины  $N$ ,  $K$ ,  $L$  рёбер проведено сечение пирамиды плоскостью.



1. Докажите, что:
  - а)  $NK \parallel MDC$ ; б)  $LF \parallel KN$ ; в) сечение  $NKLF$  — равнобедренная трапеция.
2. Вычислите периметр трапеции.
3. Составьте план вычисления площади трапеции.

## Уроки № 51—52

### Тема уроков: Решение задач по теме «Пирамида».

#### Основные задачи уроков

Рассмотреть задачи на вычисление площади поверхности произвольной пирамиды.

#### Примерный план проведения уроков

1. Проверить выборочно решения задач из домашней работы. Желательно использовать готовые чертежи, слайды с решениями этих задач.

2. Решить несколько задач на вычисление элементов и площади поверхности произвольной пирамиды. С этой целью использовать задачи 239—253 выборочно, задачи 266 и 267, а также дополнительные задачи к главе. Эти задачи могут быть использованы как на уроках № 51—52, так и при проведении зачёта по теме.

При подборе задач к урокам следует иметь в виду, что к задачам, связанным с пирамидой, предстоит вернуться в 11 классе в связи с рассмотрением формулы объёма пирамиды.

3. Повторить доказательство теоремы о вычислении площади боковой поверхности правильной пирамиды.

4. С целью проверки уровня сформированности навыков решения задач провести самостоятельную работу на вычисление элементов и площади поверхности правильной пирамиды.

Приведём решения некоторых из названных выше задач для работы на уроках. В процессе их решения от учащихся можно требовать лишь минимально необходимые обоснования.

**Задача 241.** Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 5 м и 4 м и меньшей диагональю 3 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Решение.

1) Пусть  $AB=5$  м,  $AD=4$  м,  $BD=3$  м. Заметим, что треугольник  $ABD$  прямоугольный:  $\angle ADB=90^\circ$  (рис. 3.8).

$AD \perp DO$ , следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах  $AD \perp MD$ , т. е.  $MD$  является высотой грани  $MAD$ .

2) Из  $\triangle MDO$  получаем  $MD = \sqrt{2^2 + 1,5^2}$  м  $= \sqrt{6,25}$  м  $= 2,5$  м.

3) Из  $\triangle ADB$  имеем  $DK \perp AB$ ,  $AB \cdot DK = AD \cdot BD$ ,  $5 \cdot DK = 4 \cdot 3$ ,  $DK = \frac{12}{5}$  м. Из  $\triangle MOF$  получаем  $OF \parallel DK$ ,

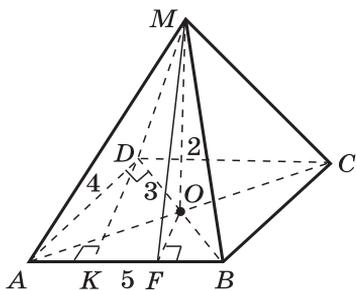


Рис. 3.8

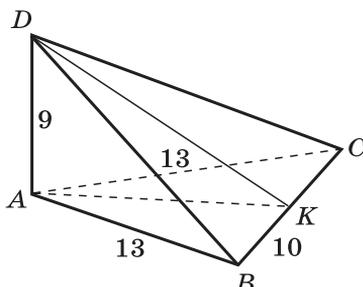


Рис. 3.9

$$OF = \frac{1}{2} DK, \quad OF = \frac{6}{5} \text{ м.}$$

$$MF = \sqrt{MO^2 + OF^2} = \sqrt{4 + \frac{36}{25}} \text{ м} = \sqrt{\frac{136}{25}} \text{ м} = \frac{2\sqrt{34}}{5} \text{ м.}$$

$$4) S_{\text{бок}} = 2S_{AMD} + 2S_{AMB} = (4 \cdot 2,5 + 5 \cdot \frac{2\sqrt{34}}{5}) \text{ м}^2 = (10 + 2\sqrt{34}) \text{ м}^2.$$

$$S_{\text{осн}} = 4 \cdot 3 \text{ м}^2 = 12 \text{ м}^2. \quad S_{\text{пир}} = (22 + 2\sqrt{34}) \text{ м}^2.$$

Ответ:  $(22 + 2\sqrt{34}) \text{ м}^2$ .

**Задача 243.** Основанием пирамиды  $DABC$  является треугольник  $ABC$ , у которого  $AB = AC = 13$  см,  $BC = 10$  см, ребро  $AD$  перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

1) Проведём  $AK \perp BC$ , тогда  $BC \perp DK$  (по теореме о трёх перпендикулярах), т. е.  $DK$  — высота треугольника  $DBC$  (рис. 3.9).

2) Из  $\triangle ABK$  получаем

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{169 - 25} \text{ см} = \sqrt{144} \text{ см} = 12 \text{ см.}$$

3) Из  $\triangle DAK$  имеем

$$DK = \sqrt{DA^2 + AK^2} = \sqrt{81 + 144} \text{ см} = \sqrt{225} \text{ см} = 15 \text{ см.}$$

$$4) \triangle ADB = \triangle ADC \text{ (по двум катетам)}. \quad S_{\text{бок}} = 2S_{ADB} + S_{BDC}, \\ S_{\text{бок}} = (13 \cdot 9 + 5 \cdot 15) \text{ см}^2 = (117 + 75) \text{ см}^2 = 192 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $192 \text{ см}^2$ .

**Задача 245.** Основанием пирамиды является прямоугольник, диагональ которого равна 8 см. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны к плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с основанием углы в  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . Найдите площадь поверхности пирамиды.

Решение.

1) Предположим, что плоскости  $MAB$  и  $MAD$  перпендикулярны к плоскости основания, тогда линия их пересече-

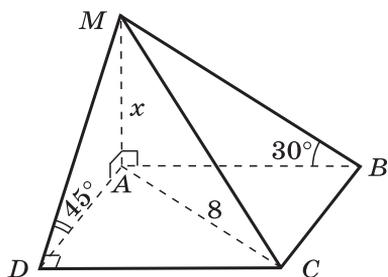


Рис. 3.10

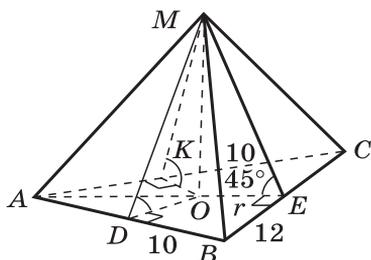


Рис. 3.11

чения  $MA$  перпендикулярна к плоскости основания, т. е.  $MA$  — высота пирамиды (рис. 3.10).

2) Так как  $CB \perp AB$ , то  $CB \perp MB$  по теореме о трёх перпендикулярах, поэтому  $\angle MBA$  — линейный угол двугранного угла при ребре  $CB$ ,  $\angle MBA = 30^\circ$ .

Аналогично  $AD \perp DC$ ,  $MD \perp DC$ ,  $\angle MDA$  — линейный угол двугранного угла при ребре  $DC$ ,  $\angle MDA = 45^\circ$ . Треугольники  $MBC$  и  $MDC$  прямоугольные.

3) Пусть  $MA = x$  см, тогда  $MB = 2x$  см,  $AB = x\sqrt{3}$  см. Из  $\triangle MAD$  имеем  $MA = AD = x$  см,  $MD = x\sqrt{2}$  см. Из  $\triangle ABC$  получаем  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ,  $3x^2 + x^2 = 64$ ,  $x^2 = 16$ ,  $x = 4$ .

4) Таким образом,

$$MA = 4 \text{ см}, AB = DC = 4\sqrt{3} \text{ см},$$

$$MB = 8 \text{ см}, MD = 4\sqrt{2} \text{ см}, AD = BC = 4 \text{ см}.$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} AB \cdot AM + \frac{1}{2} AD \cdot AM + \frac{1}{2} BC \cdot BM + \frac{1}{2} DC \cdot DM =$$

$$= \left( \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} \right) \text{ см}^2 =$$

$$= (24 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{6}) \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{осн}} = 4\sqrt{3} \cdot 4 \text{ см}^2 = 16\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{пир}} = (24 + 24\sqrt{3} + 8\sqrt{6}) \text{ см}^2 = 8(3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{6}) \text{ см}^2.$$

Ответ:  $8(3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{6}) \text{ см}^2$ .

**Задача 248.** Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 12 см, 10 см и 10 см. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом  $45^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

1) Пусть  $AB = AC = 10$  см,  $BC = 12$  см,  $MO$  — высота пирамиды,  $AE$  — высота и медиана к стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  (рис. 3.11). Из  $\triangle ABE$  получаем  $BE = 6$  см,  $AE = 8$  см.  $S_{ABC} = 6 \cdot 8 \text{ см}^2 = 48 \text{ см}^2$ .

2) Пусть  $OD$  и  $OK$  — перпендикуляры к сторонам треугольника  $ABC$ , тогда  $\angle MEO$ ,  $\angle MDO$ ,  $\angle MKO$  — линей-



**Задача 251.** Основанием пирамиды  $DABC$  является прямоугольный треугольник с гипотенузой  $BC$ . Боковые рёбра пирамиды равны друг другу, а её высота равна 12 см. Найдите боковое ребро пирамиды, если  $BC = 10$  см.

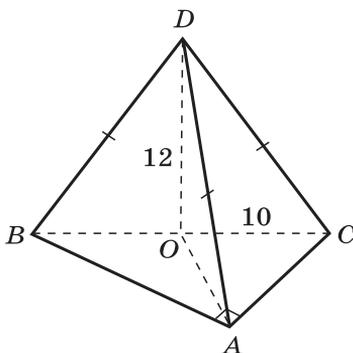


Рис. 3.12

**Решение.** Пусть  $DO$  — высота пирамиды. Тогда треугольники  $DAO$ ,  $DBO$  и  $DCO$  равны по гипотенузе и катету. Следовательно,  $OA = OB = OC$ , т. е. точка  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$  (рис. 3.12). Так как треугольник  $ABC$  прямоугольный, то центром описанной окружности является середина гипотенузы  $BC$ . Из  $\triangle DOC$  получаем  $OC = 5$  см,

$$DC = \sqrt{DO^2 + OC^2} = \sqrt{144 + 25} \text{ см} = \sqrt{169} \text{ см} = 13 \text{ см}.$$

Ответ: 13 см.

На уроке № 52 проводится самостоятельная работа на вычисление элементов и площади поверхности правильной пирамиды.

### Самостоятельная работа № 3.2

#### Вариант 1

Высота правильной треугольной пирамиды равна  $a\sqrt{3}$ , радиус окружности, описанной около её основания, равен  $2a$ . Найдите:

- апофему пирамиды;
- угол между боковой гранью и основанием;
- площадь боковой поверхности;
- плоский угол при вершине пирамиды.

#### Вариант 2

Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна  $2a$ , высота пирамиды равна  $a\sqrt{2}$ . Найдите:

- сторону основания пирамиды;
- угол между боковой гранью и основанием;
- площадь поверхности пирамиды;
- расстояние от центра основания пирамиды до плоскости боковой грани.

#### Ответы:

**Вариант 1.** а)  $2a$ ; б)  $60^\circ$ ; в)  $6\sqrt{3}a^2$ ; г)  $2 \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Вариант 2.** а)  $2\sqrt{2}a$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $8(\sqrt{2} + 1)a^2$ ; г)  $a$ .

## Урок № 53

### Тема урока: Усечённая пирамида

#### Основные задачи урока

Ввести понятие усечённой пирамиды и рассмотреть вопрос о вычислении площади её поверхности.

#### Примерный план проведения урока

1. Обсудить результаты самостоятельной работы, проведённой на предыдущем уроке, проанализировать ошибки, допущенные в работах.

2. Ввести понятие усечённой пирамиды. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, разбивает её на два многогранника. Один из них является пирамидой, а другой называется усечённой пирамидой. Усечённая пирамида — это часть полной пирамиды, заключённая между её основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию данной пирамиды.

При выполнении рисунков к задачам на усечённую пирамиду удобно вначале начертить полную пирамиду, а затем выделить усечённую пирамиду.

3. Используя модели и рисунок 83 учебника, назвать элементы усечённой пирамиды: основания, боковые грани, боковые рёбра, высоту. Доказать, что боковые грани усечённой пирамиды — трапеции.

4. Ввести понятие правильной усечённой пирамиды. Отметить, что основания правильной усечённой пирамиды — правильные многоугольники, а боковые грани — равные равнобедренные трапеции; высоты этих трапеций называются апофемами усечённой пирамиды.

5. Вывести формулу площади боковой поверхности правильной усечённой пирамиды. С этой целью заметить, что сначала можно вычислить площадь одной боковой грани, а затем полученный результат умножить на число граней. Очевидно, что  $S_{\text{грани}} = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h$ , где  $a_1$  и  $a_2$  — стороны оснований,  $h$  — апофема правильной усечённой пирамиды. Поэтому  $S_{\text{бок}} = n \cdot S_{\text{грани}} = \frac{a_1 \cdot n + a_2 \cdot n}{2} \cdot h = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h$ , где  $P_1$  и  $P_2$  — периметры оснований.

6. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 268—270.

**Задача 269.** Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды равны 4 дм и 2 дм, а боковое ребро равно 2 дм. Найдите высоту и апофему пирамиды.

Решение. Пусть  $O$  и  $O_1$  — центры оснований усечённой пирамиды (рис. 3.13).

1) Из треугольника  $ABC$  получаем  $AB = R\sqrt{3}$ , где  $R = AO$ , откуда  $AO = \frac{4}{\sqrt{3}}$  дм,  $OK = \frac{AO}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$  дм.

2) Из  $\triangle A_1B_1C_1$  находим

$$A_1O_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ дм}, \quad O_1M = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ дм}.$$

3)  $EK = OK - OE$ ,  $OE = O_1M$ , откуда  $EK = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  дм =  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  дм.

4) Из  $\triangle AA_1F$  имеем  $AF = AO - FO$ ,  $FO = A_1O_1$ .  $AF = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$  дм =  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  дм.  $A_1F = \sqrt{AA_1^2 - AF^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{3}}$  дм =  $\sqrt{\frac{8}{3}}$  дм =  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$  дм.

5) Из  $\triangle MEK$  получаем  $MK = \sqrt{ME^2 + EK^2} = \sqrt{\frac{8}{3} + \frac{1}{3}}$  дм =  $\sqrt{\frac{9}{3}}$  дм =  $\sqrt{3}$  дм.

Ответ:  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$  дм,  $\sqrt{3}$  дм.

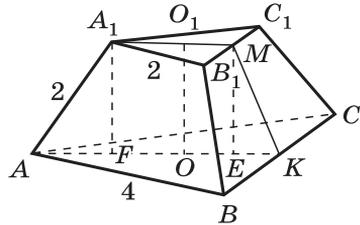


Рис. 3.13

## § 3. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

### Уроки № 54—57

Тема уроков: Симметрия в пространстве.

Понятие правильного многогранника.

Элементы симметрии правильных многогранников

Основные задачи уроков

Ввести понятие правильного многогранника, рассмотреть все пять видов правильных многогранников.

Примерный план проведения уроков

1. Ввести понятия симметричных точек относительно точки, прямой, плоскости; понятия центра, оси и плоскости симметрии фигуры. Провести беседу с учащимися, используя текст учебника (п. 35) и рисунки 84—87, дающие наглядное представление о рассматриваемых понятиях.

2. Ввести понятие правильного многогранника, при этом подчеркнуть два условия, входящие в определение

правильного многогранника: а) все грани такого многогранника — равные правильные многоугольники; б) в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число рёбер.

3. В учебнике доказано, что существует только пять видов правильных многогранников и не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные  $n$ -угольники при  $n \geq 6$ . Возможна следующая схема обоснования этого утверждения на уроке:

Угол правильного многоугольника вычисляется по формуле  $\alpha_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ . При каждой вершине многогранника не меньше трёх плоских углов, и их сумма должна быть меньше  $360^\circ$ .

При  $n=3$ , когда гранями многогранника служат правильные треугольники, имеем  $\alpha_3 = 60^\circ$ ,  $60^\circ \cdot 3 = 180^\circ < 360^\circ$ ,  $60^\circ \cdot 4 = 240^\circ < 360^\circ$ ,  $60^\circ \cdot 5 = 300^\circ < 360^\circ$ ,  $60^\circ \cdot 6 = 360^\circ$ . В соответствии с этим получаем правильные многогранники, изображённые на рисунках 88, 89, 90: правильные тетраэдр, октаэдр, икосаэдр.

Если  $n=4$ , т. е. грани многогранника — квадраты, то  $\alpha_4 = 90^\circ$ ,  $90^\circ \cdot 3 = 270^\circ < 360^\circ$ ,  $90^\circ \cdot 4 = 360^\circ$ . Поэтому в этом случае получаем только один правильный многогранник — куб (см. рис. 91).

Если  $n=5$ , т. е. грани многогранника — правильные пятиугольники, то  $\alpha_5 = 108^\circ$ ,  $108^\circ \cdot 3 = 324^\circ < 360^\circ$ ,  $108^\circ \cdot 4 = 432^\circ > 360^\circ$ , и поэтому в этом случае также имеем только один правильный многогранник — додекаэдр (см. рис. 92).

Если  $n \geq 6$ , то  $\alpha_n \geq 120^\circ$ ,  $\alpha_n \cdot 3 \geq 360^\circ$ , и, следовательно, не существует правильного многогранника, гранями которого служат правильные  $n$ -угольники при  $n \geq 6$ .

4. Рассмотреть выборочно задачи типа 281, 282, 287 и др.

5. Полезно использовать диафильм «Правильные многогранники» (автор И. Вейцман). Это обогащает содержание урока, делает его более интересным для учащихся.

6. Целесообразно предложить учащимся изготовить дома модели правильных многогранников. Для этой цели нужно использовать развёртки правильных многогранников, изображённые на рисунках 95—99 учебника.

7. Для проведения занятия спецкурса, факультативного занятия, конференции учащихся по изучаемой теме, изготовления моделей для кабинета (лаборатории) математики может быть использована дополнительная литература:

1) Энциклопедический словарь юного математика. — М.: Педагогика, 1985.

2) Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика. — М.: Аванта+, 1999.

- 3) Смирнова И. М. В мире многогранников.— М.: Просвещение, 1995.
- 4) Волошинов А. В. Математика и искусство.— М.: Просвещение, 2000.
- 5) Венниджер М. Модели многогранников.— М.: Мир, 1974.
- 6) Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп.
- 7) Штейнгауз Г. Сто задач.— М.: Наука, 1982.
- 8) Глейзер Г. И. История математики в школе.— М.: Просвещение, 1983.

## Урок № 58

### Тема урока: Теорема Эйлера

#### Основные задачи урока

Сформулировать теорему Эйлера для выпуклых многогранников, обсудить схему её доказательства.

#### Примерный план проведения урока

1. Напомнить определение выпуклого многогранника.
2. Сформулировать теорему Эйлера (п. 29\*).
3. Для некоторых многогранников (тетраэдр, параллелепипед,  $n$ -угольная призма,  $n$ -угольная пирамида, правильные многогранники) сосчитать число граней, вершин, рёбер и убедиться с помощью прямого подсчёта в справедливости для них теоремы Эйлера.
4. Обсудить схему доказательства теоремы Эйлера, содержащегося в п. 29\*, либо другого доказательства, приведённого ниже.

Теорема Эйлера. В любом выпуклом многограннике  $f + e - k = 2$ , где  $f$  — число граней,  $e$  — число вершин,  $k$  — число рёбер многогранника.

Доказательство этой теоремы проведено с помощью центрального проектирования многогранника на плоскость одной из его граней с последующим подсчётом двумя способами суммы углов всех треугольников, на которые разбивается проекция многогранника.

Приведём другое доказательство теоремы Эйлера, в котором используется не центральное, а прямоугольное проектирование, а затем, как и в первом способе, подсчитывается двумя способами сумма углов.

Рассмотрим прямоугольную проекцию выпуклого многогранника  $M$  на какую-нибудь плоскость  $\alpha$ , не перпендикулярную ни одной из его граней. Проекция представляет собой выпуклый многоугольник, ограниченный замкнутой ломаной  $L'$  (рис. 3.14, а), которая является проекцией

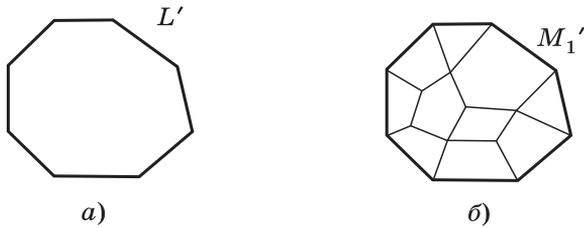


Рис. 3.14

пространственной замкнутой ломаной  $L$ , составленной из рёбер многогранника. Если разрезать многогранник по ломаной  $L$ , то получатся две части (обозначим их  $M_1$  и  $M_2$ ), каждая из которых взаимно однозначно проектируется на многоугольник с границей  $L'$ . На рисунке 3.14, б изображена проекция  $M_1'$  части  $M_1$ , составленная из выпуклых многоугольников, являющихся проекциями граней этой части. Пусть  $M_1$  имеет  $l$  граней с числом рёбер  $n_1, n_2, \dots, n_l$  этих граней и пусть  $e_1$  — число вершин  $M_1'$ , проекции которых лежат внутри многоугольника с границей  $L'$  (назовём их внутренними вершинами на  $M_1'$ ), а  $e_2$  — число вершин на  $L'$ . Найдём сумму углов всех многоугольников, из которых составлена фигура  $M_1'$ , причём сделаем это двумя способами.

С одной стороны, эта сумма равна  $\sum_{i=1}^l (n_i - 2) \cdot 180^\circ$ , так как сумма углов  $i$ -го многоугольника равна  $(n_i - 2) \cdot 180^\circ$ .

С другой стороны, эта сумма равна сумме углов многоугольника с границей  $L'$ , т. е.  $(e_2 - 2) \cdot 180^\circ$ , плюс число внутренних вершин, умноженных на  $360^\circ$ , т. е.  $e_1 \cdot 360^\circ$ . Таким образом, получаем равенство

$$\sum_{i=1}^l (n_i - 2) \cdot 180^\circ = (e_2 - 2) \cdot 180^\circ + e_1 \cdot 360^\circ,$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^l n_i - 2l = 2e_1 + e_2 - 2. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь проекцию  $M_2'$  части  $M_2$  многогранника на плоскость  $\alpha$ . Она представляет собой фигуру, аналогичную  $M_1'$  и ограниченную той же самой ломаной  $L'$ . Пусть  $M_2$  имеет  $m$  граней с числом рёбер  $p_1, p_2, \dots, p_m$  этих граней и пусть  $e_3$  — число внутренних вершин на  $M_2'$ . Тогда имеем равенство, аналогичное (1):

$$\sum_{i=1}^m p_i - 2m = 2e_3 + e_2 - 2. \quad (2)$$

Сложим равенства (1) и (2) и учтём, что сумма  $\left(\sum_{i=1}^l n_i + \sum_{i=1}^m p_i\right)$  равна удвоенному числу рёбер многогранника  $M$ , т. е. равна  $2k$ . Это следует из того, что проекция каждого ребра, лежащая внутри  $M'_1$  или  $M'_2$ , является стороной двух многоугольников, а каждая сторона ломаной  $L'$  также входит в эту сумму дважды — по одному разу в равенства (1) и (2). Итак, приходим к равенству

$$2k - 2(l + m) = 2(e_1 + e_2 + e_3) - 4. \quad (3)$$

Но  $l + m = f$  (число граней многогранника  $M$ ), а  $e_1 + e_2 + e_3 = e$  (число вершин многогранника  $M$ ), поэтому из равенства (3) получаем искомое равенство

$$f + e - k = 2.$$

Схему приведённого доказательства теоремы Эйлера (проектирование на плоскость, не перпендикулярную ни одной грани многогранника, и подсчёт суммы углов многоугольников для проекций каждой из двух его частей двумя способами) можно сообщить наиболее подготовленным учащимся и предложить им самостоятельно провести доказательство по этой схеме.

Отметим также, что в ходе доказательства мы не обосновывали тот факт, что ломаная  $L'$  и проекция каждой грани многогранника являются выпуклыми многоугольниками. Соответствующее обоснование можно предложить сделать самим учащимся.

**Задача 1.** Проверьте справедливость теоремы Эйлера для правильных многогранников.

Правильный многогранник	Форма грани	Число вершин $e$	Число граней $f$	Число рёбер $k$
Тетраэдр	Треугольник	4	4	6
Гексаэдр	Квадрат	8	6	12
Октаэдр	Треугольник	6	8	12
Додекаэдр	Пятиугольник	20	12	30
Икосаэдр	Треугольник	12	20	30

**Задача 2.** Рассмотрим усечённый гексаэдр (куб). В кубе срезаны все восемь трёхгранных углов при вершинах (рис. 3.15). Оставшееся тело есть некоторый выпуклый многогранник.

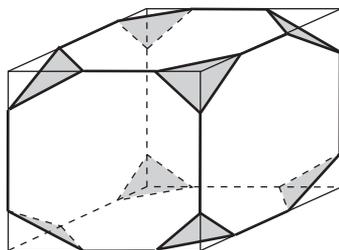


Рис. 3.15

Проверьте справедливость теоремы Эйлера для этого многогранника.

## Урок № 59

### Контрольная работа № 3.1

#### Вариант 1

1<sup>0</sup>. Основанием пирамиды  $DABC$  является правильный треугольник  $ABC$ , сторона которого равна  $a$ . Ребро  $DA$  перпендикулярно к плоскости  $ABC$ , а плоскость  $DBC$  составляет с плоскостью  $ABC$  угол в  $30^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2. Основанием прямого параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является ромб  $ABCD$ , сторона которого равна  $a$  и угол равен  $60^\circ$ . Плоскость  $AD_1 C_1$  составляет с плоскостью основания угол в  $60^\circ$ . Найдите:

- а)<sup>0</sup> высоту ромба;
- б)<sup>0</sup> высоту параллелепипеда;
- в)<sup>0</sup> площадь боковой поверхности параллелепипеда;
- г)<sup>0</sup> площадь поверхности параллелепипеда.

#### Вариант 2

1<sup>0</sup>. Основанием пирамиды  $MABCD$  является квадрат  $ABCD$ , ребро  $MD$  перпендикулярно к плоскости основания,  $AD = DM = a$ . Найдите площадь поверхности пирамиды.

2. Основанием прямого параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является параллелограмм  $ABCD$ , стороны которого равны  $a\sqrt{2}$  и  $2a$ , острый угол равен  $45^\circ$ . Высота параллелепипеда равна меньшей высоте параллелограмма.

Найдите:

- а)<sup>0</sup> меньшую высоту параллелограмма;
- б)<sup>0</sup> угол между плоскостью  $ABC_1$  и плоскостью основания;
- в)<sup>0</sup> площадь боковой поверхности параллелепипеда;
- г)<sup>0</sup> площадь поверхности параллелепипеда.

**Ответы:**

**Вариант 1.** 1.  $a^2$ . 2. а)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ; б)  $\frac{3a}{2}$ ; в)  $6a^2$ ; г)  $(6+\sqrt{3})a^2$ .

**Вариант 2.** 1.  $(2+\sqrt{2})a^2$ . 2. а)  $a$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $2(2+\sqrt{2})a^2$ ; г)  $2(4+\sqrt{2})a^2$ .

**Урок № 60**

**Зачёт № 3. Многогранники.**

**Площади поверхностей призмы и пирамиды**

**Карточка 1**

1. Докажите теорему о площади боковой поверхности прямой призмы.

2. Решите одну из задач: 305 или 306. Некоторым учащимся можно предложить решить задачу для частных значений  $h$  и  $\alpha$ ,  $h$  и  $\varphi$ . Например, в задаче 305 можно положить  $h=4$  см,  $\alpha=60^\circ$ .

3. **Задача.** В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 4 см, плоский угол при вершине равен  $60^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

**Карточка 2**

1. Докажите теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды.

2. Решите одну из задач: 294 или 298. Некоторым учащимся можно предложить решить задачу для частных значений  $S_0$  и  $a$ ,  $b$  и  $a$ . Например, в задаче 294 можно положить  $S_0=60$  см<sup>2</sup>,  $a=6$  см.

3. **Задача.** Правильная четырёхугольная призма пересечена плоскостью, содержащей две её диагонали. Площадь полученного сечения равна 60 см<sup>2</sup>, а сторона основания равна 6 см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

**Карточка 3**

1. Расскажите о правильных многогранниках.

2. Решите одну из задач: 303 или 308. Возможно некоторое изменение условий задач.

3. **Задача.** Основанием пирамиды является ромб. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют двугранный угол в  $150^\circ$ , а две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом  $45^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если её высота равна 4 см.

## **Дополнительные вопросы к зачёту**

1. Сформулируйте теорему Эйлера. Проверьте справедливость теоремы Эйлера для любого правильного многогранника.
2. Напишите формулу площади прямоугольной проекции многоугольника. Докажите её для треугольника.
3. Сформулируйте пространственную теорему Пифагора. Приведите план доказательства этой теоремы.

## **Уроки № 61—68**

---

### **Тема уроков: Заключительное повторение тем геометрии 10 класса**

Многие теоретические вопросы целесообразно повторять в процессе решения задач. Во время данных уроков полезно обратиться ещё раз к Приложению 1 (в конце учебника) с тем, чтобы закрепить умение учащихся правильно изображать пространственные фигуры, опираясь на свойства параллельного проектирования. Учащимся рекомендуется также ознакомиться с Приложением 2 «Об аксиомах геометрии».

**ЦИЛИНДР, КОНУС И ШАР**

**§ 1. ЦИЛИНДР**

**Уроки № 1—3**

**Тема уроков: Понятие цилиндра.  
Площадь поверхности цилиндра**

**Основные задачи уроков**

Ввести понятия цилиндрической поверхности, цилиндра и его элементов (боковая поверхность, основания, образующие, ось, высота, радиус), вывести формулы для вычисления площадей боковой и полной поверхностей цилиндра, научить учащихся решать задачи по данной теме.

**Примерный план проведения уроков**

1. В начале первого урока ввести понятия цилиндрической поверхности, цилиндра и его элементов, использовать рисунок 100 учебника.

2. Важно обратить внимание учащихся на то обстоятельство, что цилиндр может быть образован вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 101 учебника), а осевое сечение цилиндра есть прямоугольник (рис. 102). Это используется при решении ряда задач.

3. Формула площади боковой поверхности цилиндра выводится на основе определения, по которому за площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь её развёртки. Тот факт, что боковую поверхность цилиндра можно развернуть на плоскость и при этом получится прямоугольник, принимается на основе наглядных представлений.

4. На первом уроке следует рассмотреть весь теоретический материал пп. 38, 39 и решить задачи 320, 322, 324, 326. Для работы дома — задачи 321, 323, 325, 337.

5. Второй и третий уроки следует посвятить повторению вопросов теории и решению задач.

На уроках и дома рассматриваются выборочно задачи 326—345. Можно использовать также дополнительные задачи 396—403.

6. Для организации фронтальной работы с учащимися и обсуждения подходов к решению задач полезны слайды 4.1, 4.2, а также вопросы 1—4 к главе IV.

7. На третьем уроке провести самостоятельную работу.

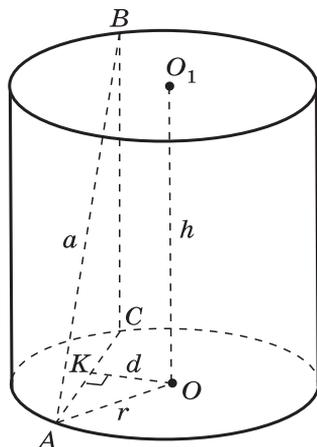
## 4.1

Концы отрезка  $AB$ , равного  $a$ , лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус цилиндра равен  $r$ , высота равна  $h$ , а расстояние между прямой  $AB$  и осью  $OO_1$  цилиндра равно  $d$ .

1. Объясните, как построить отрезок, длина которого равна расстоянию между скрещивающимися прямыми  $AB$  и  $OO_1$ .

2. Составьте (и объясните) план нахождения величины  $d$  по заданным величинам  $a$ ,  $h$ ,  $r$ .

3. Составьте (и объясните) план нахождения  $h$  по заданным величинам  $a$ ,  $r$ ,  $d$ .



## 4.2

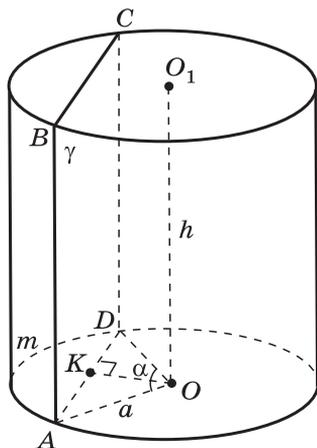
Плоскость  $\gamma$ , параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу  $AmD$  с градусной мерой  $\alpha$ . Радиус цилиндра равен  $a$ , высота равна  $h$ , расстояние между осью  $OO_1$  цилиндра и плоскостью  $\gamma$  равно  $d$ .

1. Докажите, что сечение цилиндра плоскостью  $\gamma$  есть прямоугольник.

2. Объясните, как построить отрезок, длина которого равна расстоянию между осью цилиндра и секущей плоскостью.

3. Найдите  $AD$ , если  $a = 10$  см,  $\alpha = 60^\circ$  (другие варианты:  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\alpha = 120^\circ$ ).

4. Составьте (и объясните) план вычисления площади сечения по данным  $\alpha$ ,  $h$ ,  $d$ .



## Самостоятельная работа № 4.1

### Вариант 1

1. Развёртка боковой поверхности цилиндра является квадратом, диагональ которого равна 10 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в  $120^\circ$ . Высота цилиндра равна 5 см, радиус цилиндра —  $2\sqrt{3}$  см. Найдите площадь сечения.

### Вариант 2

1. Развёртка боковой поверхности цилиндра является прямоугольником, диагональ которого равна 8 см, а угол между диагоналями —  $30^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, есть квадрат. Эта плоскость отсекает от окружности основания дугу в  $90^\circ$ . Радиус цилиндра равен 4 см. Найдите площадь сечения.

### Ответы:

Вариант 1. 1.  $50 \text{ см}^2$ . 2.  $30 \text{ см}^2$ .

Вариант 2. 1.  $16 \text{ см}^2$ . 2.  $32 \text{ см}^2$ .

**Задача 326 а).** Концы отрезка  $AB=13$  дм лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус цилиндра равен 10 дм, а расстояние между прямой  $AB$  и осью цилиндра равно 8 дм. Найдите высоту  $h$  цилиндра.

Решение.

1) Проведём образующую  $BC$  (рис. 4.1). Так как  $OO_1 \parallel BC$ , то  $OO_1 \parallel ABC$ .

2) Проведём  $OK \perp AC$ . Так как  $OK \perp OO_1$  и  $OO_1 \parallel BC$ , то  $OK \perp BC$ . Таким образом, прямая  $OK$  перпендикулярна к двум пересекающимся прямым  $AC$  и  $BC$  плоскости  $ABC$ . Следовательно,  $OK \perp ABC$ , и поэтому расстояние между прямыми  $AB$  и  $OO_1$  равно  $OK$  (п. 19), т. е.  $OK=8$  дм.

3) Из  $\triangle AKO$  получаем

$$AK = \sqrt{10^2 - 8^2} \text{ дм} = 6 \text{ дм},$$

поэтому  $AC=12$  дм.

4) Из  $\triangle ABC$  имеем

$$BC = \sqrt{13^2 - 12^2} \text{ дм} = 5 \text{ дм}.$$

Итак,  $h=5$  дм.

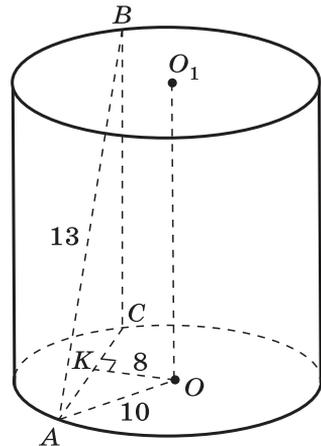


Рис. 4.1

**Задача 331.** Через образующую  $AA_1$  цилиндра проведены две секущие плоскости, одна из которых проходит через ось цилиндра. Найдите отношение площадей сечения цилиндра этими плоскостями, если угол между ними равен  $\varphi$ .

Решение.

1) Обратимся к рисунку 4.2:  $CA \perp AA_1$ ,  $BA \perp AA_1$ , поэтому  $\angle CAB$  — линейный угол двугранного угла с ребром  $AA_1$ ,  $\angle CAB = \varphi$  (по условию),  $\angle ACB = 90^\circ$  (вписанный угол, опирающийся на диаметр).

2) Из треугольника  $ABC$  получаем  $\frac{AC}{AB} = \cos \varphi$ .

3)  $\frac{S_{ACC_1A_1}}{S_{ABB_1A_1}} = \frac{AC \cdot AA_1}{AB \cdot AA_1} = \frac{AC}{AB} = \cos \varphi$ .

**Задача 341.** Угол между образующей цилиндра и диагональю осевого сечения равен  $\varphi$ , площадь основания цилиндра равна  $S$ . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение.

1) Пусть прямоугольник  $ABCD$  — осевое сечение цилиндра (рис. 4.3). Обозначим радиус цилиндра буквой  $r$ , а высоту буквой  $h$ , тогда

$$AD = 2r, \quad AB = h.$$

Из треугольника  $ABD$  получаем  $AB = 2r \operatorname{ctg} \varphi$ , т. е.

$$h = 2r \operatorname{ctg} \varphi.$$

2)  $S_{\text{бок}} = 2\pi r h = 2\pi r \cdot 2r \operatorname{ctg} \varphi = 4\pi r^2 \operatorname{ctg} \varphi$ .

По условию задачи  $\pi r^2 = S$ , следовательно,

$$S_{\text{бок}} = 4S \operatorname{ctg} \varphi.$$

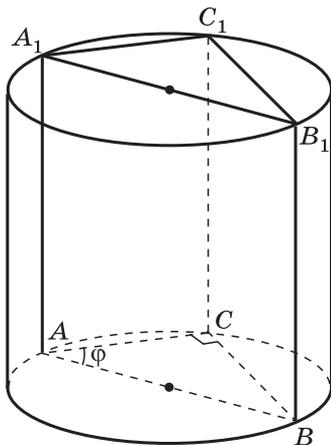


Рис. 4.2

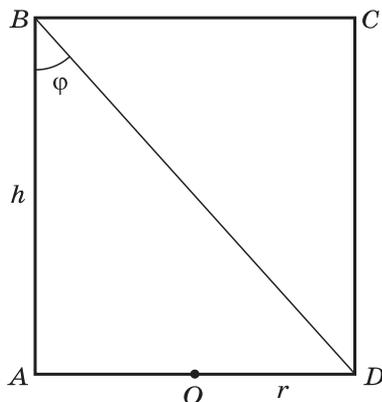


Рис. 4.3

## § 2. КОНУС

### Уроки № 4—6

#### Тема уроков: Понятие конуса. Площадь поверхности конуса. Усечённый конус

##### Основные задачи уроков

Ввести понятия конической поверхности, конуса и его элементов (боковая поверхность, основание, вершина, образующие, ось, высота), усечённого конуса, вывести формулы для вычисления площадей боковой и полной поверхностей конуса и усечённого конуса, научить учащихся решать задачи по данной теме.

##### Примерный план проведения уроков

1. На первом уроке ввести понятия конической поверхности, конуса и его элементов (рис. 106 и 107 учебника).

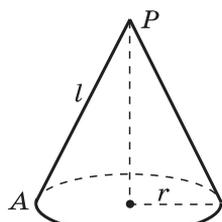
2. Важно обратить внимание учащихся на то, что конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (рис. 108 учебника), а осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник (см. рис. 109). Это используется при решении задач.

3. По определению за площадь боковой поверхности конуса принимается площадь её развёртки. Используя рисунок 111, а, б, следует разъяснить учащимся, что боковую поверхность конуса можно развернуть на плоскость, разрезав её по одной из образующих. При этом получится круговой сектор. В процессе вычисления его площади используется тот факт, что длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса, а радиус кругового сектора равен образующей конуса. Вычисления можно оформить следующим образом (рис. 4.4, а, б):

$$S_{\text{бок}} = S_{\text{сект}} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360} = \frac{\pi l \alpha}{180} \cdot \frac{l}{2} = L \cdot \frac{l}{2} = 2\pi r \cdot \frac{l}{2} = \pi r l.$$

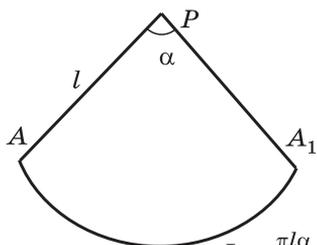
4. На первом уроке целесообразно рассмотреть весь материал пп. 40, 41 и решить задачи 346, 348а, 361.

Для работы дома — задачи 347, 349, 357, 362; разобрать приведённое в учебнике решение задачи 355.



$$L = 2\pi r$$

а)



б)

$$L = \frac{\pi l \alpha}{180}$$

Рис. 4.4

Второй урок следует посвятить изучению усечённого конуса, выводу формулы для вычисления площади его боковой поверхности (п. 42).

5. У учащихся должно сформироваться представление о том, что усечённый конус — это часть полного конуса, заключённая между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

6. Полезно обратить внимание учащихся на следующие моменты: усечённый конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг её боковой стороны, перпендикулярной к основаниям, а осевое сечение усечённого конуса есть равнобедренная трапеция.

7. В начале второго урока целесообразно провести математический диктант. Это позволит судить об уровне навыков решения несложных задач, вести работу по формированию этих навыков, повторить основные вопросы темы.

#### Математический диктант № 4.1

1. Какая фигура получается в сечении цилиндра (конуса) плоскостью, проходящей: а) через ось цилиндра (конуса); б) перпендикулярно к оси цилиндра (конуса)?

2. Вопрос 5 к главе IV (вопрос 6 к главе IV).

3. Осевое сечение конуса представляет собой равнобедренный треугольник со стороной  $a$ . Найдите высоту конуса. (Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого равна  $a$ . Найдите высоту цилиндра.)

4. Высота и радиус основания конуса равны 2 см. Через две образующие, угол между которыми равен  $30^\circ$ , проведена секущая плоскость. Найдите площадь сечения. (Высота конуса равна 2 см, а угол при вершине осевого сечения равен  $120^\circ$ . Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми равен  $90^\circ$ .)

5. Как изменится площадь боковой поверхности конуса, если его образующую и радиус основания увеличить в 3 раза (уменьшить в 2 раза)?

6. Сколько плоскостей симметрии имеет конус? (Сколько осей симметрии имеет усечённый конус?)

Для работы на уроке можно использовать задачи 350а, б, 352, 353а, 366, 367.

Для работы дома — задачи 350в, 351, 353б, 368.

Третий урок следует посвятить повторению вопросов теории и решению задач. Для работы на уроке и дома можно использовать задачи 354, 356—360, 363—365, 369—371, а также дополнительные задачи 404—413.

Работа со слайдом 4.3 позволяет упрочить навыки решения задач, связанных с конусом, способствует повышению уровня подготовки учащихся.

Высота конуса равна  $h$ . Через образующие  $MA$  и  $MB$  проведена плоскость, составляющая угол  $\alpha$  с плоскостью основания конуса. Хорда  $AB$  стягивает дугу с градусной мерой  $\beta$ .

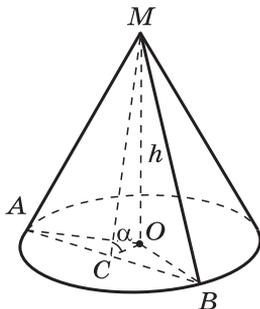
1. Докажите, что сечение конуса плоскостью  $MAB$  — равнобедренный треугольник.

2. Объясните, как построить линейный угол двугранного угла, образованного секущей плоскостью и плоскостью основания конуса.

3. Найдите  $MC$ .

4. Составьте (и объясните) план вычисления длины хорды  $AB$  и площади сечения  $MAB$ .

5. Покажите на рисунке, как можно провести перпендикуляр из точки  $O$  к плоскости сечения  $MAB$  (обозначьте построение).



**Задача 354 б).** Высота конуса равна 10 см. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в  $60^\circ$ , если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол  $45^\circ$ .

**Решение.**

1) Так как хорда  $AB$  основания конуса стягивает дугу в  $60^\circ$  (рис. 4.5), то она равна радиусу основания:  $AB = OA = OB$ .

2) Проведём  $OC \perp AB$  и соединим отрезком точки  $C$  и  $M$ . Тогда  $AB \perp CM$  (по теореме о трёх перпендикулярах) и  $\angle MCO$  — линейный угол двугранного угла с ребром  $AB$ . По условию  $\angle MCO = 45^\circ$ .

3) Из  $\triangle MCO$  имеем

$$CO = MO = 10 \text{ см}, \quad MC = 10\sqrt{2} \text{ см.}$$

4) Из  $\triangle BOC$  получаем

$$BO = \frac{OC}{\cos 30^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$

5)  $S_{MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot MC =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot 10\sqrt{2} \text{ см}^2 = \frac{100\sqrt{6}}{3} \text{ см}^2.$$

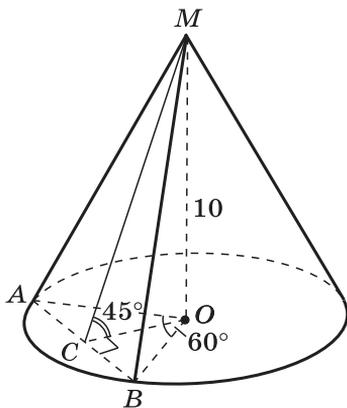


Рис. 4.5

**Задача 365.** Равнобедренный треугольник  $ABC$ , боковая сторона которого равна  $m$ , а угол при основании равен  $\varphi$ , вращается вокруг основания. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении треугольника.

Решение.

1) Тело, полученное при вращении равнобедренного треугольника  $ABC$  вокруг основания  $AC$ , состоит из двух конусов с общим основанием, диаметром которого служит отрезок  $BB_1$  (рис. 4.6). Искомая площадь  $S$  равна удвоенной площади боковой поверхности конуса:  $S = 2S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot OB \cdot AB$ .

2) Из треугольника  $AOB$  имеем  $AB = m$ ,  $OB = m \sin \varphi$ . Следовательно,  $S = 2\pi m \sin \varphi \cdot m = 2\pi m^2 \sin \varphi$ .

**Задача 368.** Радиусы оснований усеченного конуса равны  $R$  и  $r$ , где  $R > r$ , а образующая составляет с плоскостью основания угол в  $45^\circ$ . Найдите площадь осевого сечения.

Решение.

1) На рисунке 4.7 изображено осевое сечение данного усеченного конуса — равнобедренная трапеция  $ABCD$ . Пусть  $BK \perp AD$ , точки  $M$  и  $E$  — середины отрезков  $BC$  и  $AD$ , т. е. точки  $M$  и  $E$  — центры оснований усеченного конуса. Тогда  $BM = r$ ,  $AE = R$ ,  $KE = BM = r$ ,  $AK = R - r$ .

2) Из  $\triangle ABK$  имеем  $BK = AK = R - r$  (так как острый угол прямоугольного треугольника равен  $45^\circ$ , то катеты  $BK$  и  $AK$  равны).

$$\begin{aligned} 3) \quad S_{\text{сеч}} = S_{ABCD} &= \frac{BC + AD}{2} \cdot BK = \frac{2r + 2R}{2} \cdot (R - r) = \\ &= (R + r)(R - r) = R^2 - r^2. \end{aligned}$$

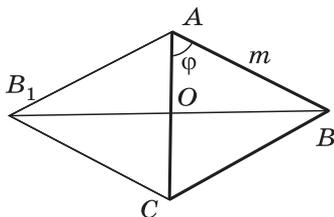


Рис. 4.6

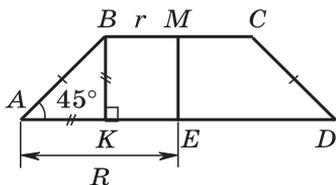


Рис. 4.7

## § 3. СФЕРА

### Уроки № 7–10

Тема уроков: Сфера и шар.

Взаимное расположение сферы и плоскости.

Касательная плоскость к сфере. Площадь сферы

Основные задачи уроков

Ввести понятия сферы, шара и их элементов (центр, радиус, диаметр), рассмотреть возможные случаи взаим-

ного расположения сферы и плоскости, теоремы о касательной плоскости к сфере, познакомить учащихся с формулой площади сферы, научить их решать задачи по данной теме.

### Примерный план проведения уроков

1. На первом уроке целесообразно рассмотреть содержание пп. 43, 44. Пункт 43 начинается с определения сферы: сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

Шар определяется как тело, ограниченное сферой. Можно дать более развёрнутое определение: шаром радиуса  $R$  с центром в точке  $O$  называется тело, которое содержит все точки пространства, расположенные от точки  $O$  на расстоянии, не превышающем  $R$  (включая и точку  $O$ ), и не содержит других точек.

2. Полезно отметить, что сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг её диаметра, а шар — вращением полукруга вокруг его диаметра. Можно провести аналогию между рассматриваемыми определениями сферы и шара и соответствующими определениями окружности и круга.

3. При исследовании взаимного расположения сферы и плоскости можно отметить, что с увеличением расстояния от центра сферы до секущей плоскости радиус окружности, получившейся в сечении, уменьшается, и окружность вырождается в точку, когда это расстояние становится равным радиусу сферы.

4. Наряду с рассмотрением теоретического материала на первом уроке при наличии времени можно решить выборочно две-три задачи из числа задач 372—377. Остальные из этих задач, а также вопросы 7 и 8 к главе IV, можно использовать для работы дома.

5. Второй урок целесообразно начать с повторения различных случаев взаимного расположения сферы и плоскости, выделив тот случай, когда сфера и плоскость имеют только одну общую точку. Тем самым учащиеся подвоятся к определению касательной плоскости к сфере.

Далее нужно рассмотреть две теоремы — свойство и признак касательной плоскости — в соответствии с текстом учебника. Полезно провести аналогию между рассматриваемыми теоремами и теоремами о касательной к окружности из курса планиметрии.

Часть второго урока и третий урок следует посвятить решению задач.

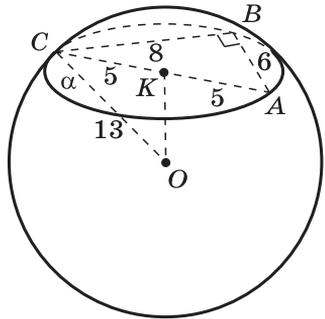
## 4.4

Вершины треугольника  $ABC$  лежат на сфере, радиус которой равен 13. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если  $AB=6$ ,  $BC=8$ ,  $AC=10$ .

Схема решения.

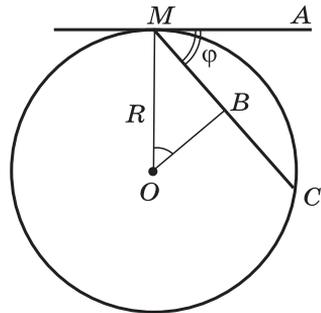
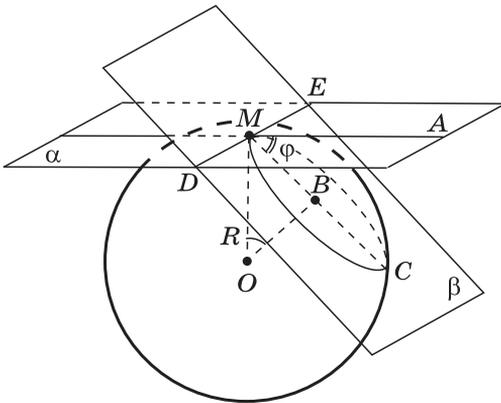
- $10^2=6^2+8^2$ ,  $\angle ABC=90^\circ$ .
- $OK \perp \alpha$ ,  $K$  — центр круга,  $AK=KC=5$ .
- $OK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ .

Приведите полное обоснование решения.



## 4.5

Через точку  $M$  сферы радиуса  $R$  проведены две плоскости, одна из которых является касательной к сфере, а другая наклонена под углом  $\varphi$  к касательной плоскости.



- Объясните, как построить линейный угол двугранного угла, образованного данными плоскостями.
- Докажите, что перпендикуляр, проведённый из центра шара к секущей плоскости, проходит через центр сечения.
- Найдите радиус сечения шара второй плоскостью.
- Найдите площадь сечения.

Для классной и домашней работы можно использовать задачи 378—385; вопросы 9 и 10 к главе IV.

6. Для второго и третьего уроков полезны слайды 4.4, 4.5. С их помощью можно вести фронтальную работу по обсуждению подходов к решению задач по теме урока.

7. На последнем, четвёртом уроке рассматривается формула площади сферы (п. 46). Обоснование этой формулы будет дано позднее, после вывода формулы объёма шара в следующей главе учебника.

На уроке целесообразно решить задачи 388, 390, 393, 394.

Для работы дома — задачи 389, 391, 392, 395.

Наряду с основными задачами к § 3 на уроках по теме этого параграфа можно использовать дополнительные задачи 414—421.

## Уроки № 11—14

### **Тема уроков: Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар. Сечения цилиндрической и конической поверхностей**

Под таким названием в учебнике фигурируют задачи 422—439. В них рассматриваются различные комбинации тел: многогранники (призмы и пирамиды), вписанные в сферу и описанные около сферы; призмы, вписанные в цилиндр, и пирамиды, вписанные в конус; конус, вписанный в сферу, и сфера, вписанная в конус; сфера, вписанная в цилиндр, и цилиндр, вписанный в сферу. При решении той или иной задачи прежде всего нужно добиться того, чтобы учащиеся хорошо представляли взаимное расположение указанных в условии тел. Иначе говоря, учащиеся должны понимать, что если сфера вписана в многогранник, то она касается всех его граней; если конус вписан в сферу, то вершина конуса лежит на сфере, а основание конуса является сечением сферы, и т. д. Приведём решения некоторых задач из этого цикла.

**Задача 431 а).** Докажите, что около любого тетраэдра можно описать сферу.

Решение.

1) Если сфера описана около многогранника, то все его вершины лежат на сфере, т. е. все вершины вписанного многогранника равноудалены от центра описанной сферы. Поэтому нам нужно доказать, что для любого тетраэдра  $ABCD$  существует такая точка  $O$ , что все четыре вершины  $A, B, C, D$  равноудалены от этой точки.

2) Возьмём сначала три вершины, например  $A$ ,  $B$  и  $C$ , и найдём множество всех точек пространства, равноудалённых от этих трёх точек. Таким множеством является прямая  $a$ , проходящая через центр  $M$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , и перпендикулярная к плоскости этого треугольника (рис. 4.8).

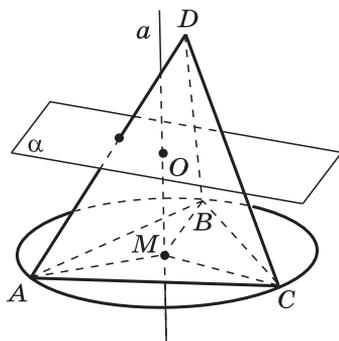


Рис. 4.8

3) Остаётся найти на прямой  $a$  такую точку, которая удалена от четвёртой вершины  $D$  на такое же расстояние, как и от вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Чтобы найти такую точку, рассмотрим множество всех точек пространства, равноудалённых от точек  $D$  и  $A$ . Таким множеством является плоскость  $\alpha$ , проходящая через середину отрезка  $AD$  перпендикулярно к нему (см. рис. 4.8). Плоскость  $\alpha$  и прямая  $a$  пересекаются в некоторой точке  $O$ , которая и будет центром сферы, описанной около тетраэдра  $ABCD$ .

**Замечание.** Чтобы доказательство было полным, нужно ещё доказать, что плоскость  $\alpha$  и прямая  $a$  действительно пересекаются. Это следует из того, что плоскость  $\alpha$  не перпендикулярна к плоскости треугольника  $ABC$ , поэтому она пересекается с прямой  $a$ , перпендикулярной к плоскости  $ABC$ .

**Задача 433.** В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна  $a$ , а боковое ребро равно  $2a$ . Найдите радиусы вписанной и описанной сфер.

**Решение** (краткий вариант, некоторые детали опущены).

1) Обратимся к рисунку 4.9,  $a$ , на котором  $ABCD$  — данная пирамида,  $O$  — центр вписанной в пирамиду сферы,  $AK$  — высота пирамиды,  $K$  — точка касания вписанной сферы с гранью  $BCD$ ,  $M$  — точка касания сферы с гранью  $ACD$ , точка  $M$  лежит на апофеме  $AE$ ,  $OM \perp AE$ . Радиус вписанной сферы обозначим буквой  $r$ . Тогда  $OK = OM = r$ .

$$2) KE = \frac{1}{3} BE = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$3) AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$4) AK = \sqrt{AE^2 - KE^2} = a\sqrt{\frac{11}{3}}.$$

5) Из подобия треугольников  $AOM$  и  $AKE$  следует

$$\frac{OM}{AO} = \frac{KE}{AE}, \text{ или } \frac{r}{\frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}} - r} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{15}}{2}}. \text{ Отсюда } r = \frac{3\sqrt{5}-1}{4\sqrt{33}} a.$$

6) Чтобы найти радиус  $R$  описанной сферы, обратимся к рисунку 4.9, б, на котором  $N$  — центр описанной сферы:  $NA = ND = R$ .

$$7) KD = KB = \frac{2}{3} BE = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$8) \text{ Из } \triangle NKD \text{ имеем } NK = \sqrt{ND^2 - KD^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

9) Из  $\triangle AKD$  получаем  $AK^2 + KD^2 = AD^2$ , или

$$\left( R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}} \right)^2 + \frac{a^2}{3} = 4a^2.$$

Решая это уравнение, получаем  $R = \frac{2a\sqrt{33}}{11}$ .

В классах с углублённым изучением математики на этих уроках можно рассмотреть также вопросы о взаимном расположении сферы и прямой (п. 47\* учебника) и о сечениях цилиндрической и конической поверхностей (пп. 50\* и 51\* учебника, к этой же теме относятся пп. 48\* и 49\*). При рассмотрении сечений цилиндрической и конической поверхностей используются свойства эллипса, гиперболы и параболы, которые описаны в пп. 97—99 главы VIII\* «Некоторые сведения из планиметрии». Поэтому перед изучением пп. 50 и 51 следует ознакомиться с содержанием пп. 97—99.

При наличии времени учитель может рассказать решения двух красивых задач 814 и 815 о прямой Эйлера

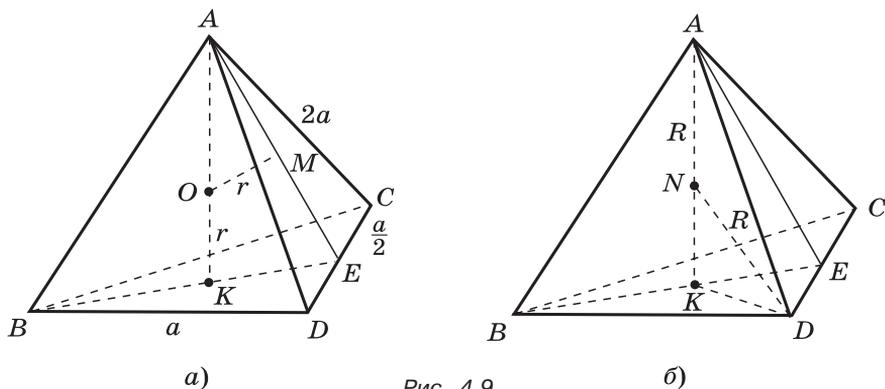


Рис. 4.9

и сфере Эйлера для тетраэдра. При решении этих задач используется задача о прямой и окружности Эйлера для треугольника, которая разобрана в п. 94 главы VIII\*, а также центральное подобие, которое вводится в п. 84\*. Поэтому предварительно нужно ознакомить учащихся с понятием центрального подобия и его свойствами. Приведём решения указанных задач.

**Задача 814.** Все высоты тетраэдра пересекаются в точке  $H$ . Докажите, что точка  $H$ , центр  $O$  описанной сферы и точка  $G$  пересечения отрезков, соединяющих вершины с точками пересечения медиан противоположных граней тетраэдра, лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причём точки  $O$  и  $H$  симметричны относительно точки  $G$ .

Решение. На рисунке 4.10 изображены вершина  $A_1$  тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  и плоскость  $\alpha$ , в которой лежат вершины  $A_2, A_3, A_4$  (чтобы не загромождать рисунок, сами эти вершины не изображены).

Отрезок  $A_1H_1$  — высота тетраэдра, т. е.  $A_1H_1 \perp \alpha$ . Точка  $H$  пересечения высот тетраэдра (она называется его *ортоцентром*) может лежать не на высоте  $A_1H_1$ , как на рисунке 4.10, а на её продолжении (этот случай рассматривается аналогично).

Воспользуемся тем, что *если все высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, то точка  $H_1$  является ортоцентром треугольника  $A_2A_3A_4$* , т. е. в этой точке пересекаются высоты этого треугольника (или их продолжения). Это утверждение учащиеся могут доказать самостоятельно, при этом полезно совместить проведение доказательства с решением задач 769 и 792.

Точка  $G_1$  — точка пересечения медиан треугольника  $A_2A_3A_4$ . Её называют также *центром масс* этого треугольника, а отрезок  $A_1G_1$  называют *медианой тетраэдра*. Точка  $G$  пересечения медиан тетраэдра (центр масс тетраэдра)

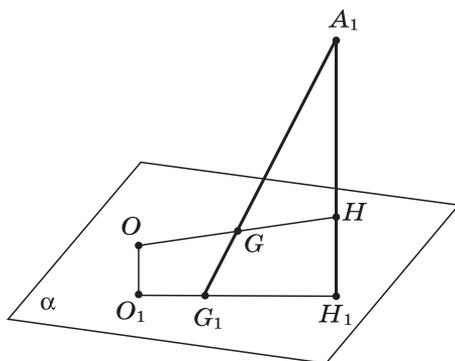


Рис. 4.10

ра) лежит на отрезке  $A_1G_1$  и делит его в отношении  $A_1G:GG_1=3:1$  (этот факт учащиеся также могут обосновать самостоятельно). Точка  $O_1$  — центр окружности, описанной около треугольника  $A_2A_3A_4$ , поэтому  $OO_1 \perp \alpha$ .

Согласно задаче Эйлера (п. 94) точки  $O_1$ ,  $G_1$  и  $H_1$  лежат на одной прямой (прямая Эйлера треугольника  $A_2A_3A_4$ ), причём  $O_1G_1:G_1H_1=1:2$ . Следовательно, точки  $O$ ,  $G$  и  $H$  лежат в плоскости  $A_1G_1H_1$ .

Рассмотрим теперь вершину  $A_2$  тетраэдра и соответствующие ей точки  $O_2$ ,  $G_2$ ,  $H_2$ , аналогичные точкам  $O_1$ ,  $G_1$ ,  $H_1$ . Как и при рассмотрении точек  $A_1$ ,  $O_1$ ,  $G_1$ ,  $H_1$ , приходим к выводу, что точки  $O$ ,  $G$  и  $H$  лежат в плоскости  $A_2G_2H_2$ . Поэтому точки  $O$ ,  $G$  и  $H$  лежат на прямой, по которой пересекаются плоскости  $A_1G_1H_1$  и  $A_2G_2H_2$ , и, таким образом, эти точки лежат на одной прямой.

Обратимся теперь к рисунку 4.11, на котором  $GK \perp O_1H_1$ . Пусть  $O_1G_1=2x$ , тогда согласно задаче Эйлера  $G_1H_1=4x$ ,

а так как  $\frac{G_1K}{KH_1} = \frac{G_1G}{GA_1} = \frac{1}{3}$ , то  $G_1K=x$ ,  $KH_1=3x$ . Следовательно,

но,  $O_1K=O_1G_1+G_1K=2x+x=3x=KH_1$ .

Из равенства  $O_1K=KH_1$  по теореме Фалеса следует, что  $OG=GH$ , т. е. точки  $O$  и  $H$  симметричны относительно точки  $G$ .

**Задача 815.** Дан тетраэдр, все высоты которого пересекаются в одной точке. Докажите, что точки пересечения медиан всех граней, основания высот тетраэдра и точки, которые делят каждый из отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами в отношении  $2:1$ , считая от вершины, лежат на одной сфере, центр которой лежит на прямой Эйлера (сфера Эйлера).

Решение. Обратимся к рисунку 4.12, на котором  $A_1$  — вершина тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ , точки  $O_1$ ,  $G_1$ ,  $H_1$ ,  $O$ ,  $G$ ,  $H$  — те же самые, что и в задаче 814,  $M_1$  — точка на отрезке  $A_1H$ , такая, что  $A_1M_1:M_1H=2:1$ . Требуется доказать, что точки  $G_1$ ,  $H_1$ ,  $M_1$  и аналогичные им тройки точек, соответствующие вершинам  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ , лежат на одной сфере, центр которой лежит на прямой  $OH$ .

Будем использовать следующее свойство центрального подобия: при центральном подобии с центром  $A$  и ко-

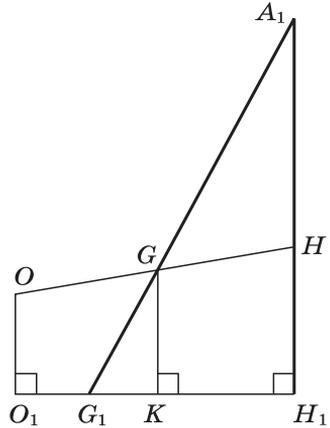


Рис. 4.11

эффицентом  $k$  сфера радиуса  $R$  с центром в точке  $C$  переходит в сферу радиуса  $|k| \cdot R$ , центром которой является та точка  $C'$ , в которую переходит точка  $C$ . Доказательство этого утверждения учащиеся могут провести самостоятельно.

Рассмотрим центральное подобие с центром  $G$  и коэффициентом  $-\frac{1}{3}$ . Так как  $GG_1 = \frac{1}{3}GA_1$ , то при этом центральном подобии вершина  $A_1$  переходит в точку  $G_1$ , а вершины  $A_2, A_3, A_4$  тетраэдра переходят в соответствующие точки  $G_2, G_3, G_4$  (центры масс соответствующих граней тетраэдра). Точка  $O$  (центр описанной сферы тетраэдра) переходит в точку  $O'$ , лежащую на прямой  $OG$  по другую сторону от точки  $G$ , нежели точка  $O$ , причём  $O'G = \frac{1}{3}OG$  (см. рис. 4.12).

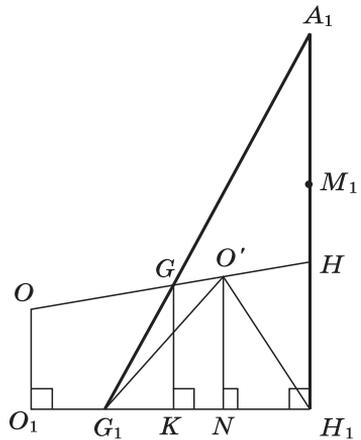


Рис. 4.12

Следовательно, описанная сфера тетраэдра (обозначим её радиус буквой  $R$ ), на которой лежат вершины  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , переходит в сферу радиуса  $\frac{R}{3}$  с центром в точке  $O'$  и на ней лежат точки  $G_1, G_2, G_3, G_4$ . Покажем, что точки  $H_1$  и  $M_1$  также лежат на этой сфере.

Так как  $OG = GH$  (см. задачу 814) и  $O'G = \frac{1}{3}OG$ , то  $O'H = \frac{1}{3}OH$ . Отсюда следует, что  $NH_1 = \frac{1}{3}O_1H_1$ , а так как  $OG_1 = \frac{1}{3}O_1H_1$ , то  $G_1N = O_1H_1 - (O_1G_1 + NH_1) = \frac{1}{3}O_1H_1 = NH_1$ .

Из равенства  $G_1N = NH_1$  следует, что прямоугольные треугольники  $G_1NO'$  и  $H_1NO'$  равны (по двум катетам), и поэтому  $O'H_1 = O'G_1 = \frac{R}{3}$ , т. е. точка  $H_1$  лежит на сфере радиуса  $\frac{R}{3}$  с центром  $O'$ .

Наконец, рассмотрим центральное подобие с центром  $H$  и коэффициентом  $\frac{1}{3}$ . Так как  $O'H = \frac{1}{3}OH$  и  $M_1H = \frac{1}{3}A_1H$ , то при этом центральном подобии точка  $O$  (центр описанной сферы) переходит в точку  $O'$  и, значит, описанная сфера переходит снова в сферу радиуса  $\frac{R}{3}$  с центром  $O'$ , а точка  $A_1$ , лежащая на описанной сфере, переходит в точку  $M_1$ . Следовательно, точка  $M_1$  лежит на сфере радиуса  $\frac{R}{3}$  с центром  $O'$ .

Точно так же доказывается, что на этой сфере лежат точки  $H_i$  и  $M_i$  ( $i=2, 3, 4$ ), соответствующие вершине  $A_i$  и аналогичные точкам  $H_1$  и  $M_1$ .

Другие теоремы и формулы, включённые в главу VIII\* «Некоторые сведения из планиметрии», могут быть изучены по мере надобности при рассмотрении тех или иных вопросов стереометрии. Так, пп. 85—89, в которых рассматриваются углы и отрезки, связанные с окружностью, а также вписанный и описанный четырёхугольники, целесообразно рассмотреть в теме «Сфера и шар», а пп. 90—93, относящиеся к треугольнику,— в теме «Многогранники».

## Урок № 15

### Контрольная работа № 4.1

#### Вариант 1

1. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь основания цилиндра равна  $16\pi$  см<sup>2</sup>. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

2. Высота конуса равна 6 см, угол при вершине осевого сечения равен  $120^\circ$ . Найдите: а) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми равен  $30^\circ$ ; б) площадь боковой поверхности конуса.

3. Диаметр шара равен  $2m$ . Через конец диаметра проведена плоскость под углом  $45^\circ$  к нему. Найдите длину линии пересечения сферы этой плоскостью.

#### Вариант 2

1. Осевое сечение цилиндра — квадрат с диагональю, равной 4 см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

2. Радиус основания конуса равен 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом  $30^\circ$ . Найдите: а) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми равен  $60^\circ$ ; б) площадь боковой поверхности конуса.

3. Диаметр шара равен  $4m$ . Через конец диаметра проведена плоскость под углом  $30^\circ$  к нему. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью.

#### Ответы:

**Вариант 1.** 1.  $96\pi$  см<sup>2</sup>. 2. а)  $36$  см<sup>2</sup>; б)  $72\pi\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.  
3.  $\pi m\sqrt{2}$ .

**Вариант 2.** 1.  $12\pi$  см<sup>2</sup>. 2. а)  $12\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>; б)  $24\pi\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.  
3.  $3\pi m^2$ .

## Урок № 16

### **Зачёт № 4. Цилиндр, конус и шар**

#### **Карточка 1**

1. Объясните, какое тело называется цилиндром. Выведите формулу площади полной поверхности цилиндра.

2. Высота конуса равна 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом  $30^\circ$ . Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми равен  $60^\circ$ .

3. Радиус шара равен  $R$ . Найдите площадь поверхности вписанного в шар куба.

#### **Карточка 2**

1. Объясните, какое тело называется конусом. Выведите формулу площади полной поверхности конуса.

2. Радиус шара равен 8 см. Через конец радиуса, лежащего на сфере, проведена плоскость под углом  $45^\circ$  к радиусу. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью.

3. Куб с ребром  $a$  вписан в цилиндр. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

#### **Карточка 3**

1. Объясните, какое тело называется усечённым конусом. Выведите формулу площади полной поверхности усечённого конуса.

2. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси, отсекает от окружности основания дугу в  $90^\circ$ . Найдите площадь сечения, если высота цилиндра равна 6 см, а расстояние между осью цилиндра и секущей плоскостью равно 3 см.

3. Около шара радиуса  $R$  описан правильный тетраэдр. Найдите площадь поверхности тетраэдра.

#### **Карточка 4**

1. Объясните, какая поверхность называется сферой и какое тело называется шаром. Исследуйте взаимное расположение сферы и плоскости в зависимости от соотношения между радиусом сферы и расстоянием от её центра до плоскости.

2. Радиус кругового сектора равен 6 см, а его угол равен  $120^\circ$ . Сектор свёрнут в коническую поверхность. Найдите площадь полной поверхности конуса.

3. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник. В конус вписана треугольная пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 16 см. Найдите высоту пирамиды.

#### **Карточка 5**

1. Перечислите возможные случаи взаимного расположения сферы и плоскости. Докажите, что сечение сферы плоскостью есть окружность.

2. Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

3. В сферу вписан конус, образующая которого равна  $l$ , а угол при вершине осевого сечения равен  $60^\circ$ . Найдите площадь сферы.

#### **Карточка 6**

1. Сформулируйте определение касательной плоскости к сфере. Докажите теоремы о касательной плоскости (свойство и признак касательной плоскости).

2. Площадь сечения шара плоскостью, проходящей через его центр, равна  $16\pi$  см<sup>2</sup>. Найдите площадь сферы.

3. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 4 см и наклонена к плоскости основания под углом  $45^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму.

#### **Дополнительные вопросы к зачёту**

1. Расскажите о возможных случаях взаимного расположения сферы и прямой.

2. Расскажите о разных видах сечений цилиндрической и конической поверхностей (эллипс, парабола, гипербола).

## § 1. ОБЪЁМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

### Уроки № 17—19

#### Тема уроков: Понятие объёма. Объём прямоугольного параллелепипеда

##### Основные задачи уроков

Ввести понятие объёма тела, рассмотреть свойства объёмов, теорему об объёме прямоугольного параллелепипеда и следствие об объёме прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник.

##### Примерный план проведения уроков

На первом уроке при введении понятия объёма тела необходимо акцентировать внимание учащихся на следующем:

1. Предполагается, что каждое из рассматриваемых тел имеет объём, который можно измерить с помощью выбранной единицы измерения. За единицу измерения объёмов принимается куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Единицами измерения могут быть кубический сантиметр, кубический метр и т. д.

2. Процедура измерения объёмов аналогична процедуре измерения площадей. Число единиц измерения (единичных кубов) и частей единицы, содержащихся в данном теле, принимается за числовое значение объёма при выбранной единице измерения. Это число может быть как рациональным (в частности, целым), так и иррациональным.

3. Вывод формул для вычисления объёмов тел опирается на два основных свойства объёмов.

*Свойство 1<sup>о</sup>*: равные тела имеют равные объёмы.

Понятие равных тел определяется на основе понятия наложения. Следует рассмотреть примеры равных тел, используя рисунок 131, *а*, *б* учебника. Доказательство равенства двух тел в каждом из рассмотренных примеров можно провести на основе аксиом наложения и равенства фигур. Образец такого доказательства дан в Приложении 2 в конце учебника и адресован учащимся, проявляющим повышенный интерес к математике.

**Свойство 2<sup>0</sup>:** если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел (рис. 132).

4. Из основных свойств 1<sup>0</sup> и 2<sup>0</sup> выводится важное для дальнейшего следствие: объём куба с ребром  $\frac{1}{n}$  равен  $\frac{1}{n^3}$  ( $n$  — любое целое положительное число).

5. В п. 53 доказана теорема об объёме прямоугольного параллелепипеда. Доказательство не является обязательным для изучения на уроке. Оно может быть рассмотрено во внеурочное время с учащимися, особо интересующимися математикой.

6. Следует обратить внимание учащихся на то, что формула объёма прямоугольного параллелепипеда  $V = a \cdot b \cdot c$  иначе записывается так:  $V = S \cdot h$ , где  $S$  — площадь основания,  $h$  — высота параллелепипеда (см. следствие 1). Такая форма записи более соответствует последующим формулам для вычисления объёмов тел.

На первом уроке целесообразно рассмотреть содержание пп. 52, 53, включая следствие 1, и решить задачи 440, 441а, б, 442а. Для работы дома — задачи 441в, г, 442б; вопрос 1 к главе V.

На втором уроке нужно рассмотреть следствие 2, в котором доказана формула объёма прямой призмы, основанием которой служит прямоугольный треугольник  $ABC$ :  $V = S_{ABC} \cdot h$ , где  $h$  — высота призмы, и решить задачи 443, 447, 451.

Для работы дома — задачи 444, 445, 446.

Третий урок следует посвятить повторению вопросов теории и решению задач. На уроке можно решить задачи 448, 450а. Для проверки домашней работы и обсуждения подходов к решению задач целесообразно использовать слайд 5.1.

Для работы дома — задачи 449, 450б.

Самостоятельная работа контролирующего характера проводится в конце третьего урока.

## Самостоятельная работа № 5.1

### Вариант 1

1. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2,5 см, 5 см и 5 см. Найдите ребро куба, объём которого в два раза больше объёма данного параллелепипеда.

2. Найдите объём прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , если  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $AB = a$ ,  $CB = BB_1$ .

### Вариант 2

1. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2 см, 6 см и 6 см. Найдите ребро куба, объём которого в три раза больше объёма данного параллелепипеда.

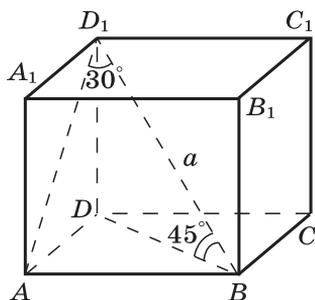
Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна  $a$  и составляет угол  $30^\circ$  с плоскостью боковой грани и угол  $45^\circ$  с плоскостью основания.

1. Объясните, как построить угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью боковой грани.

2. Объясните, как построить угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

3. Найдите длины отрезков  $AB$ ,  $AD_1$ ,  $DD_1$ .

4. Составьте план вычисления длины отрезка  $AD$  и объёма параллелепипеда.



2. Найдите объём прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , в которой  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AB = BB_1 = a$ ,  $AC = CB$ .

**Ответы:**

Вариант 1. 1. 5 см. 2.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ .

Вариант 2. 1. 6 см. 2.  $\frac{a^3}{4}$ .

## § 2. ОБЪЁМЫ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ И ЦИЛИНДРА

### Уроки № 20—21

#### Тема уроков: Объёмы прямой призмы и цилиндра

#### Основные задачи уроков

Изучить теоремы об объёмах прямой призмы и цилиндра, выработать навыки решения задач с использованием формул объёмов этих тел.

## Примерный план проведения уроков

1. При изучении теорем данного параграфа следует иметь в виду, что в следующих параграфах при выводе формул объёмов тел используется определённый интеграл. В свою очередь, формула для вычисления объёмов тел с помощью интеграла получается на основе формул объёмов прямой призмы и цилиндра, поэтому теоремы § 2 об объёмах прямой призмы и цилиндра имеют не только самостоятельный интерес, но и важное значение для вывода формул объёмов других тел, рассматриваемых в данной главе.

2. При доказательстве теоремы об объёме прямой призмы вначале рассматривается случай, когда основанием призмы служит произвольный треугольник  $ABC$ . Плоскость, проходящая через боковое ребро  $B_1B$  и высоту  $BD$  треугольника  $ABC$ , разделяет данную призму на две призмы, основаниями которых являются прямоугольные треугольники. Это позволяет использовать следствие 2 из предыдущего параграфа, в котором выведена формула для вычисления объёма прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник.

3. При выводе формулы объёма произвольной прямой призмы используется чертёж пятиугольной призмы, разбитой на три треугольные призмы (см. рис. 136 учебника). Полезно отметить, что указанным способом  $n$ -угольная призма, основанием которой является выпуклый  $n$ -угольник, разбивается на  $n-2$  треугольные призмы. Вторая часть доказательства теоремы для такой призмы может быть записана кратко следующим образом:

$$\begin{aligned} V &= S_1h + S_2h + S_3h + \dots + S_{n-2}h = \\ &= (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-2})h = Sh. \end{aligned}$$

4. Перед доказательством теоремы об объёме цилиндра необходимо ввести понятия призмы, вписанной в цилиндр, и призмы, описанной около цилиндра (рис. 137 учебника).

5. При доказательстве этой теоремы необходимо разъяснить, как получаются формулы для площадей оснований вписанной и описанной призм и неравенства для объёма  $V$  цилиндра

$$S_n \cdot h < V < \frac{S_n}{\cos^2 \frac{180^\circ}{n}} \cdot h.$$

Так как  $\cos \frac{180^\circ}{n} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , а  $S_n \rightarrow \pi r^2$ , то левая и правая части неравенств стремятся к  $\pi r^2 h$ . Следовательно,

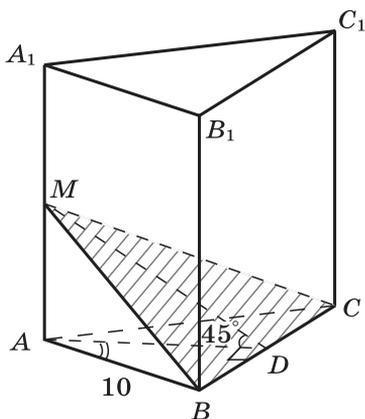
$V = \pi r^2 h$ , т.е.  $V = Sh$ , где  $S = \pi r^2$  — площадь основания цилиндра.

На первом уроке следует рассмотреть теорему об объёме прямой призмы. Для работы на уроке можно использовать задачи 452б, 453, 455, а также слайд 5.2.

### Объём прямой призмы

### 5.2

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  через сторону  $BC$  основания и середину  $M$  бокового ребра  $AA_1$  проведено сечение, составляющее угол  $45^\circ$  с плоскостью основания. Найдите объём призмы, если сторона её основания равна 10 см.



Решение.

- 1) Из  $\triangle ABD$   $AD = 10 \cdot \cos 30^\circ$  см  $= 5\sqrt{3}$  см.
- 2)  $\angle MDA = 45^\circ$  (объясните почему).
- 3) В  $\triangle MAD$   $AM = AD = 5\sqrt{3}$  см.
- 4)  $AA_1 = 2AM = 10\sqrt{3}$  см.
- 5)  $V = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} \cdot 10\sqrt{3}$  см<sup>3</sup>  $= 750$  см<sup>3</sup>.

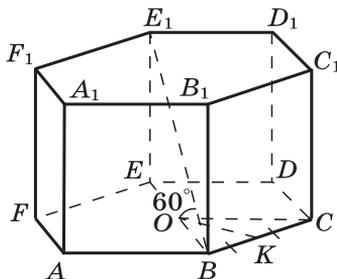
Для работы дома — задачи 452а, 454, 456в, г, 457, 458.

На втором уроке нужно рассмотреть теорему об объёме цилиндра и решить задачи 459а, в, 460, 462. Можно использовать слайд 5.3.

Для работы дома — задачи 459б, 461, 464, 465.

Для подведения итогов уроков можно провести математический диктант.

Дано:  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильная шестиугольная призма, точка  $O$  — центр её основания,  $BE_1 = 8$ ,  $\angle E_1 B E = 60^\circ$ .



Найдите:

- объём призмы;
- объём описанного около призмы цилиндра;
- объём вписанного в призму цилиндра.

Решение.

$$EE_1 = 4\sqrt{3}, \quad BE = 4, \quad OB = 2, \quad OK = \sqrt{3}.$$

$$S_{\text{осн. призмы}} = 6\sqrt{3}, \quad V_{\text{призмы}} = 72,$$

$$V_{\text{цил. оп}} = 16\pi\sqrt{3}, \quad V_{\text{цил. вп}} = 12\pi\sqrt{3}.$$

Выполнив необходимые вычисления, проверьте правильность приведённых ответов.

### Математический диктант № 5.1

1. Сформулируйте определение призмы, вписанной в цилиндр (описанной около цилиндра).

2. Запишите формулу объёма прямой призмы (цилиндра).

3. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, каждое ребро которой равно  $a$ . (В цилиндр вписан куб с ребром  $a$ .) Выполните рисунок к задаче. Найдите:

- радиус цилиндра;
- площадь боковой поверхности призмы (поверхности куба);
- объём призмы (куба);
- объём цилиндра.

**Задача 455.** Основанием прямой призмы является параллелограмм. Через сторону основания, равную  $a$ , и противоположную ей сторону другого основания проведено сечение, составляющее угол  $\beta$  с плоскостью основания. Площадь сечения равна  $Q$ . Найдите объём призмы.

Решение.

1) Сечение  $ABC_1D_1$  — параллелограмм, так как противоположные стороны  $AB$  и  $D_1C_1$  равны и параллельны (рис. 5.1). Проведём  $DK \perp AB$ , тогда  $AB \perp D_1K$  по теореме о трёх перпендикулярах. Угол  $D_1KD$  — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями сечения и основания призмы, поэтому  $\angle D_1KD = \beta$ ,

$$KD = KD_1 \cos \beta.$$

2)  $S_{ABCD} = AB \cdot KD = AB \cdot KD_1 \cdot \cos \beta = Q \cos \beta$ . Так как  $AB = a$ , то  $KD = \frac{Q \cos \beta}{a}$ .

3) Из  $\triangle D_1DK$  имеем  $DD_1 = KD \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{Q \sin \beta}{a}$ .

4)  $V = S_{ABCD} \cdot DD_1 = \frac{Q^2 \sin 2\beta}{2a}$ .

**Задача 464 д).** В цилиндр вписана правильная  $n$ -угольная призма. Найдите отношение объёмов призмы и цилиндра.

Решение.

1) На рисунке 5.2 изображены три боковые грани правильной  $n$ -угольной призмы, вписанной в цилиндр. Введём обозначения:  $CC_1 = h$ ,  $OB = r$ ,  $P$  — периметр,  $S$  — площадь основания призмы.

2) В треугольнике  $OKB$  имеем  $\angle BOK = \frac{180^\circ}{n}$ ,  $OK = r \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$ ,  $BK = r \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$ , поэтому  $BC = 2r \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$ .

3)  $P = n \cdot 2r \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$ ,  $S = \frac{1}{2} P \cdot OK = \frac{1}{2} n \cdot r^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}$ .

4)  $\frac{V_{\text{призмы}}}{V_{\text{цилиндра}}} = \frac{\frac{1}{2} n r^2 h \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}}{\pi r^2 h} = \frac{n}{2\pi} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}$ .

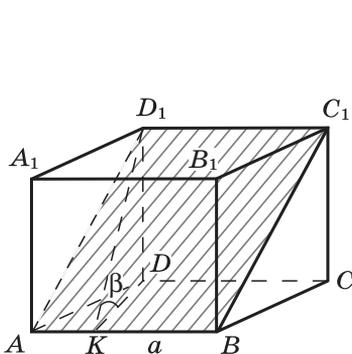


Рис. 5.1

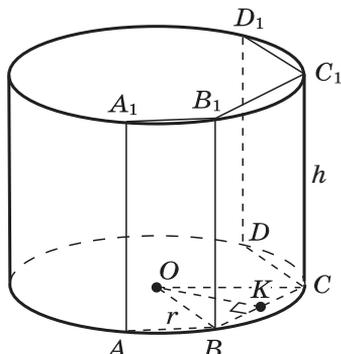


Рис. 5.2

## § 3. ОБЪЁМЫ НАКЛОННОЙ ПРИЗМЫ, ПИРАМИДЫ И КОНУСА

### Уроки № 22—23

**Тема уроков: Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла. Объём наклонной призмы**

#### Основные задачи уроков

Разъяснить учащимся возможность и целесообразность применения определённого интеграла для вычисления объёмов тел, вывести формулу объёма наклонной призмы с помощью интеграла, показать применение полученных формул при решении задач.

#### Примерный план проведения уроков

Материал п. 56 адресован в первую очередь учащимся, проявляющим повышенный интерес к математике. Менее подготовленным школьникам достаточно знать итоговую формулу для вычисления объёмов тел с помощью интеграла.

При рассказе на уроке о содержании п. 56 важно обратить внимание учащихся на следующие моменты:

1. Тело, объём которого нужно вычислить, заключено между двумя параллельными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ . При этом ось  $Ox$  выбирается перпендикулярной к этим плоскостям. Координаты точек пересечения оси  $Ox$  с плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  равны  $a$  и  $b$ ,  $a < b$  (см. рис. 140 учебника).

2. Сечение тела плоскостью, проходящей через точку с координатой  $x$  перпендикулярно к оси  $Ox$ , является либо кругом, либо многоугольником, площадь которого  $S(x)$ .

3. Числовой отрезок  $[a; b]$  разбивается на  $n$  равных отрезков точками  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$  и через точки с координатами  $x_i$  проводятся плоскости, перпендикулярные к оси  $Ox$  (рис. 141 учебника). Эти плоскости разделяют данное тело на  $n$  слоёв, высота (толщина) каждого из которых равна  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ .

4. Объём одного слоя равен приближённо объёму цилиндра (или призмы), площадь основания которого равна  $S(x_i)$ , а высота равна  $\Delta x$ . Объём  $V$  данного тела равен сумме объёмов всех слоёв, т. е. приближённо равен сумме величин  $S(x_i) \Delta x$ :

$$V \approx V_n = S(x_1) \Delta x + S(x_2) \Delta x + \dots + S(x_n) \Delta x = \sum_{i=1}^n S(x_i) \Delta x.$$

5. Без доказательства принимаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V$ , где  $V$  — объём тела. Но  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \int_a^b S(x) dx$ , поэтому

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

На первом уроке нужно рассмотреть теоретический материал, включая доказательство теоремы об объёме наклонной призмы, и решить задачи 469, 470. При объяснении теоретического материала полезно использовать слайд 5.4.

Слайд 5.4 даёт краткий конспект доказательства формулы для вычисления объёмов тел с помощью определённого интеграла. Несущественное отличие формулы для  $V_n$  на слайде от аналогичной формулы в учебнике обусловлено тем, что нумерация слоёв на слайде ведётся от 0 до  $n-1$ , а в учебнике — от 1 до  $n$ .

Для работы дома — задачи 471, 472.

Второй урок следует посвятить повторению вопросов теории и решению задач 467, 473, 475. При этом можно использовать слайды 5.5—5.7.

Слайды 5.5 и 5.6 не связаны непосредственно с вычислением объёмов тел. Вместе с тем представленные на них геометрические утверждения имеют важное значение для решения многих задач данной главы. Кроме того, они интересны и сами по себе. Например, красивая формула  $\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \beta$  получена на слайде 5.5.

Для работы дома — задачи 468, 474, 476.

Отметим, что задачи 475 и 476 связаны с другим способом вычисления объёма наклонной призмы, о котором говорится в замечании в конце п. 57.

**Задача 467.** Фигура, заштрихованная на рисунке 190 учебника, вращается вокруг оси  $Ox$ . Найдите объём полученного тела.

**Решение.** Полученное тело вращения изображено на рисунке 5.3. Объём  $V$  вычисляется по формуле

$$V = \int_0^1 S(x) dx, \text{ где } S(x) = \pi y^2(x),$$

причём  $y(x) = \sqrt{x}$ , т. е.  $S(x) = \pi x$ .

Поэтому  $V = \int_0^1 \pi x dx = \frac{\pi}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$ .

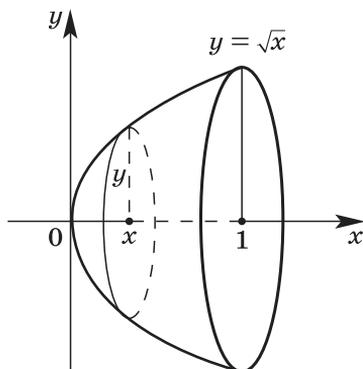
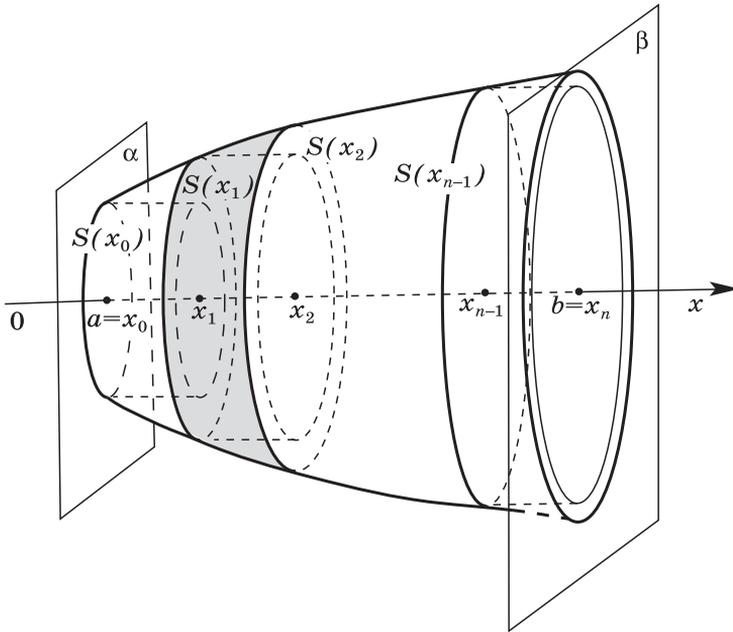


Рис. 5.3

$S(x)$  — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс и пересекающей её в точке  $x$ .  
Функция  $S(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ .



$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = \Delta x;$$

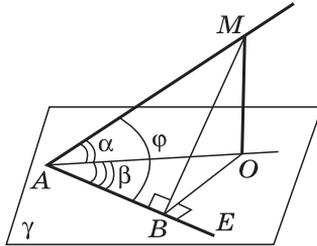
$$V \approx V_n = S(x_0) \Delta x + S(x_1) \Delta x + \dots + S(x_{n-1}) \Delta x,$$

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} S(x_i) \Delta x;$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n, \quad V = \int_a^b S(x) dx.$$

## 5.5

Дано:  $MA$  — наклонная к плоскости  $\gamma$ ,  $MO \perp \gamma$ ,  $AE$  — луч на плоскости  $\gamma$ , образующий острый угол  $\beta$  с проекцией наклонной  $AM$ ,  $\angle MAO = \alpha$ ,  $\angle BAO = \beta$ ,  $\angle MAB = \varphi$ .  
Докажите:  $\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \beta$ .



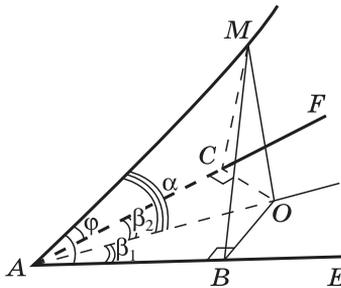
Доказательство.

Пусть  $OB \perp AE$ , тогда  $AB \perp MB$ ,  $\cos \varphi = \frac{AB}{AM} = \frac{AB}{AO} \cdot \frac{AO}{AM} = \cos \beta \cdot \cos \alpha$ .

## 5.6

Дано: луч  $AM$  образует равные острые углы с лучами  $AE$  и  $AF$ .

Докажите: проекцией луча  $AM$  на плоскость  $EAF$  является биссектриса  $AO$  угла  $EAF$ .

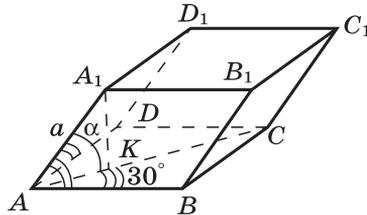


Решение. Способ 1.  $MO \perp EAF$ ,  $OB \perp AE$ ,  $OC \perp AF$ ;  $\triangle ABM = \triangle ACM$ ;  $AB = AC$ ;  $\triangle ABO = \triangle ACO$ ,  $\angle BAO = \angle CAO$ , луч  $AO$  — биссектриса угла  $EAF$ .

Способ 2.  $\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \beta_1$  |  $\cos \beta_1 = \cos \beta_2$  |  $\beta_1 = \beta_2$ .

Дополните приведённые решения необходимыми обоснованиями.

Все грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной  $a$  и острым углом  $60^\circ$ . Найдите объём параллелепипеда.



Решение.

Проекцией ребра  $AA_1$  является отрезок  $AK$ .

Пусть  $\angle A_1AK = \alpha$ , тогда

$$\cos 60^\circ = \cos \alpha \cdot \cos 30^\circ, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Из } \triangle AA_1K: A_1K = a \sin \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \quad V = a^2 \sin 60^\circ \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

**Задача 473.** Основанием наклонного параллелепипеда является прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ . Боковое ребро длины  $c$  составляет со смежными сторонами основания углы, равные  $\varphi$ . Найдите объём параллелепипеда.

Решение. Способ 1.

1) Пусть ребро  $AA_1$  образует острые углы, равные  $\varphi$ , со сторонами  $AB$  и  $AD$  (рис. 5.4). Тогда проекцией ребра  $AA_1$  на плоскость основания  $ABCD$  является отрезок  $AO$  биссектрисы угла  $DAB$  (см. слайд 5.6).

2) Проведём  $OE \perp AB$ . Тогда  $AB \perp A_1E$  по теореме о трёх перпендикулярах.

3) Из  $\triangle AA_1E$  получаем  $AE = c \cdot \cos \varphi$ ,  $A_1E = c \cdot \sin \varphi$ .

4) Из  $\triangle AEO$  имеем  $EO = AE = c \cdot \cos \varphi$ ,

так как  $\angle OAE = 45^\circ$ .

5) Из  $\triangle A_1EO$  находим

$$A_1O = \sqrt{A_1E^2 - EO^2} = \sqrt{c^2 \sin^2 \varphi - c^2 \cos^2 \varphi} = c \sqrt{-\cos 2\varphi}.$$

6)  $V = S_{ABCD} \cdot A_1O = abc \sqrt{-\cos 2\varphi}$ .

Для случая тупого угла получается тот же результат.

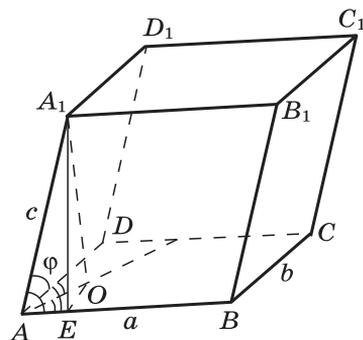


Рис. 5.4

Способ 2.

1) Пусть  $\angle A_1AO = x$ ,  $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \varphi$  (рис. 5.4). По условию  $\angle OAB = 45^\circ$ , поэтому  $\cos \varphi = \cos x \cdot \cos 45^\circ$  (см. слайд 5.5). Отсюда  $\cos x = \sqrt{2} \cdot \cos \varphi$ .

$$2) \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - 2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{-\cos 2\varphi}.$$

$$3) A_1O = AA_1 \cdot \sin x = c \sqrt{-\cos 2\varphi}.$$

$$4) V = abc \sqrt{-\cos 2\varphi}.$$

Замечание. На уроке достаточно ограничиться рассмотрением случая острого угла  $\varphi$ . Можно показать, используя неравенство  $AE < A_1E$ , что при этом  $45^\circ < \varphi < 90^\circ$ , и поэтому  $\cos 2\varphi < 0$ , так что под знаком корня стоит положительное число  $(-\cos 2\varphi)$ . В случае тупого угла  $\varphi$  выполняется неравенство

$$90^\circ < \varphi < 135^\circ,$$

и поэтому снова  $\cos 2\varphi < 0$ .

**Задача 475.** Докажите, что объём наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь сечения призмы плоскостью, перпендикулярной к боковым рёбрам и пересекающей их.

Решение.

1) Рассмотрим вначале треугольную призму. Пусть плоскости перпендикулярного сечения  $MEK$  призмы и основания  $ABC$  пересекаются по прямой  $PQ$  (рис. 5.5).

Прямая  $AA_1$  перпендикулярна плоскости  $MEK$ , следовательно,  $AA_1 \perp PQ$ .

2) Проведём высоту  $A_1O$  призмы, тогда  $A_1O \perp PQ$ .

3) Из условий  $PQ \perp AA_1$  и  $PQ \perp A_1O$  следует, что  $PQ \perp OA_1A$  по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

4) Пусть плоскость  $AA_1O$  пересекает прямую  $PQ$  в точке  $H$ , тогда угол  $AHM$  — линейный угол двугранного угла  $AQPM$ . Обозначим величину угла  $AHM$  через  $\varphi$ , тогда из прямоугольного треугольника  $MAN$  получаем  $\angle MAN = 90^\circ - \varphi$ .

5) Треугольник  $MEK$  есть ортогональная проекция треугольника  $ABC$  на плоскость перпендикулярного сечения призмы, поэтому  $S_{MEK} = S_{ABC} \cdot \cos \varphi$  (см. задачу 212).

6) Заметим, что  $APQ \perp AMH$ , так как плоскость  $APQ$  проходит через прямую  $PQ$ , перпендикулярную к пло-

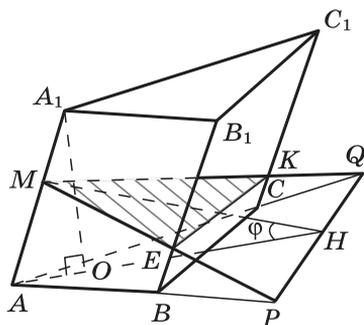


Рис. 5.5

скости  $AMH$ . Из перпендикулярности этих плоскостей следует, что высота  $A_1O$  призмы пересекает линию  $АН$  пересечения плоскостей.

7) Из  $\triangle A_1AO$  находим  $A_1O = AA_1 \cdot \sin(90^\circ - \varphi) = AA_1 \cdot \cos \varphi$ .

8) Итак,  $V = S_{ABC} \cdot A_1O = \frac{S_{MEK}}{\cos \varphi} \cdot AA_1 \cdot \cos \varphi = S_{MEK} \cdot AA_1$ .

Для треугольной призмы утверждение доказано.

9) Произвольную наклонную призму можно разбить на треугольные призмы с боковыми рёбрами такой же длины, как у исходной призмы. Площадь перпендикулярного сечения всей призмы равна сумме площадей перпендикулярных сечений треугольных призм.

Отсюда следует справедливость утверждения задачи для произвольной призмы.

## Уроки № 24—26

### Тема уроков: Объём пирамиды

#### Основные задачи уроков

Рассмотреть теорему об объёме пирамиды и, как следствие, вывести формулу объёма усечённой пирамиды, выработать навыки решения типовых задач на применение формул объёмов пирамиды и усечённой пирамиды.

#### Примерный план проведения уроков

На первом уроке следует рассмотреть доказательство теоремы об объёме пирамиды. Используя текст учебника, нужно подробно разобрать, как получается выражение для площади сечения пирамиды

$$S(x) = \frac{S}{h^2} \cdot x^2.$$

Вычислить интеграл  $V = \int_0^h \frac{S}{h^2} \cdot x^2 dx$  учащиеся могут самостоятельно.

На уроке следует рассмотреть задачи 477б, 478, 479б, в; дома — задачи 477а, 479а, 480.

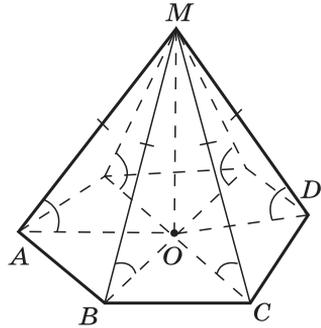
Второй урок нужно посвятить повторению вопросов теории и решению задач 481б, 483, 487. При подведении итогов урока желательно использовать вопросы 4, 5 к главе V и задачи 247, 249, аналогичные представленным на слайдах 5.8 и 5.9.

Для работы дома — задачи 481б, 482, 484.

**Задача.** Если боковые рёбра пирамиды равны (или составляют равные углы с плоскостью основания), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды.

**Доказательство.**

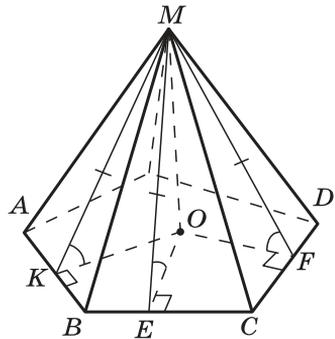
Треугольники  $MAO$ ,  $MBO$ ,  $MCO$ , ... равны по катету и гипотенузе (или по катету и острому углу). Поэтому  $OA = OB = OC = \dots$ , т. е. точка  $O$  — центр окружности, описанной около основания пирамиды.



**Задача.** Если двугранные углы при основании пирамиды равны (или равны высоты боковых граней, проведённые из вершины пирамиды), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

**Доказательство.**

Треугольники  $MKO$ ,  $MEO$ ,  $MFO$ , ... равны по катету и острому углу (или по катету и гипотенузе), поэтому  $OK = OE = OF = \dots$ , т. е. точка  $O$  — центр окружности, вписанной в основание пирамиды.



На третьем уроке выводится формула объёма усечённой пирамиды как следствие теоремы об объёме пирамиды. В учебнике предлагается вывести эту формулу самостоятельно. Приведём краткую запись вывода формулы.

Объём усечённой пирамиды рассматриваем как разность объёмов полной пирамиды и той, что отсечена от неё плоскостью, параллельной основанию (рис. 5.6).

Поэтому

$$V_{\text{усеч. пир}} = \frac{1}{3}S(h+x) - \frac{1}{3}S_1x = \frac{1}{3}Sh + \frac{1}{3}(S-S_1)x. \quad (1)$$

Из равенства

$$\frac{S}{S_1} = \frac{(h+x)^2}{x^2}$$

находим  $x = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}$ .

Подставляя это выражение для  $x$  в формулу (1), после преобразований получаем

$$V = \frac{1}{3}h(S+S_1+\sqrt{SS_1}).$$

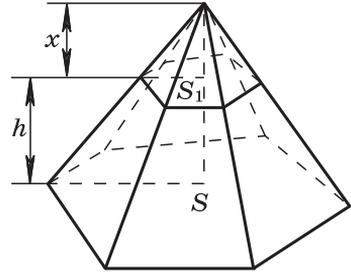


Рис. 5.6

Для классной и домашней работы используются задачи 490—493, выборочно задачи 485—489.

В конце второго урока проводится самостоятельная работа контролирующего характера.

### Самостоятельная работа № 5.2

#### Вариант 1

Задача 479а для  $l=10$  см,  $\varphi=30^\circ$ .

#### Вариант 2

Задача 481а для  $H=10$  см,  $\beta=60^\circ$ .

**Задача 487.** Основанием пирамиды является ромб со стороной 6 см. Каждый из двугранных углов при основании равен  $45^\circ$ . Найдите объём пирамиды, если её высота равна 1,5 см.

Решение.

1) По условию двугранные углы при основании пирамиды равны, поэтому вершина пирамиды проецируется в центр круга, вписанного в ромб, т. е. в точку пересечения его диагоналей (рис. 5.7).

2) Угол  $MKO$  — линейный угол двугрannого угла с ребром  $DC$ . Из  $\triangle MOK$  находим

$$MO = OK = 1,5 \text{ см.}$$

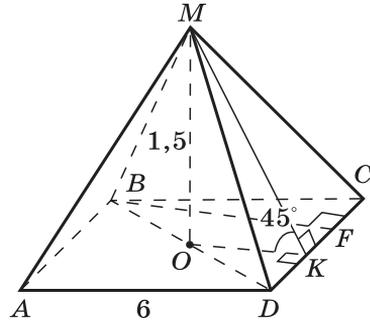


Рис. 5.7

- 3) Проведём высоту ромба  $BF$ .  $BF = 2OK = 3$  см.  
 4)  $S_{\text{осн}} = 6 \cdot 3 \text{ см}^2 = 18 \text{ см}^2$ .  
 5)  $V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 1,5 \text{ см}^3 = 9 \text{ см}^3$ .

**Задача 491.** Основания усечённой пирамиды — равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны  $m$  и  $n$  ( $m > n$ ). Две боковые грани, содержащие катеты, перпендикулярны к основанию, а третья составляет с ним угол  $\varphi$ . Найдите объём усечённой пирамиды.

Решение.

1) Пусть треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  с прямыми углами  $C$  и  $C_1$  — основания данной усечённой пирамиды. По условию две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, поэтому ребро  $CC_1$  перпендикулярно к плоскости основания (рис. 5.8).

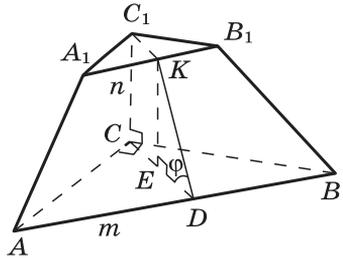


Рис. 5.8

2) Проведём  $CD \perp AB$ ,  $C_1K \perp A_1B_1$ , тогда угол  $KDC$  — линейный угол двугранного угла с ребром  $AB$ .

3) В равнобедренном прямоугольном треугольнике  $ACB$  высота  $CD$  является одновременно медианой, проведённой к гипотенузе, следовательно,  $CD = \frac{AB}{2} = \frac{m}{2}$ . Аналогично доказывается, что  $C_1K = \frac{n}{2}$ .

4) Проведём  $KE \perp CD$ , тогда  $ED = CD - CE = \frac{m-n}{2}$ . Из треугольника  $KED$  получаем

$$KE = \frac{m-n}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

5)  $S_{ABC} = \frac{1}{2} m \cdot \frac{m}{2} = \frac{m^2}{4}$ ,  $S_{A_1B_1C_1} = \frac{n^2}{4}$ .

6) Воспользуемся формулой объёма усечённой пирамиды

$$V = \frac{1}{3} h (S + S_1 + \sqrt{SS_1}).$$

В нашем случае

$$S = \frac{m^2}{4}, S_1 = \frac{n^2}{4}, h = \frac{m-n}{2} \operatorname{tg} \varphi,$$

поэтому

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{m-n}{2} \operatorname{tg} \varphi \left( \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} + \sqrt{\frac{m^2}{4} \cdot \frac{n^2}{4}} \right) = \frac{1}{24} (m^3 - n^3) \operatorname{tg} \varphi.$$

## Уроки № 27–28

### Тема уроков: Объём конуса

#### Основные задачи уроков

Рассмотреть теорему об объёме конуса и её следствие, в котором выводится формула объёма усечённого конуса; выработать навыки решения типовых задач на применение формул объёмов конуса и усечённого конуса.

#### Примерный план проведения уроков

На первом уроке нужно рассмотреть теорему об объёме конуса и следствие, в котором выводится формула объёма усечённого конуса. Пользуясь тем, что усечённый конус получается из полного конуса путём отсечения от него меньшего конуса, его объём можно представить как разность объёмов двух конусов (см. рис. 145 учебника):

$$V_{\text{усеч. кон}} = \frac{1}{3}\pi r^2(h+x) - \frac{1}{3}\pi r_1^2 x, \text{ где } x = O_1P,$$
$$V_{\text{усеч. кон}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi(r^2 - r_1^2)x. \quad (1)$$

$\triangle PO_1A_1 \sim \triangle POA$ , следовательно,  $\frac{r_1}{x} = \frac{r}{h+x}$ , откуда  $x = \frac{r_1 h}{r - r_1}$ .

Подставляя значение  $x$  в равенство (1), получаем

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rr_1 + r_1^2) = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{SS_1}).$$

Полезно отметить, что формула объёма усечённого конуса в точности такая же, как и формула объёма усечённой пирамиды.

Второй урок следует посвятить решению задач.

Для работы на уроках и дома используются задачи 494–502, вопросы 6–8 к главе V.

На втором уроке можно провести самостоятельную работу.

#### Самостоятельная работа № 5.3

##### Вариант 1

1. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а двугранный угол при основании равен  $60^\circ$ . Найдите объём пирамиды.

2. В цилиндр вписана призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник, катет которого равен  $2a$ , а прилежащий угол равен  $60^\circ$ . Диагональ большей боковой грани призмы составляет с плоскостью её основания угол  $45^\circ$ . Найдите объём цилиндра.

## Вариант 2

1. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 6 см и составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Найдите объём пирамиды.

2. В конус вписана пирамида. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, катет которого равен  $2a$ , а прилежащий угол равен  $30^\circ$ . Боковая грань пирамиды, проходящая через данный катет, составляет с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Найдите объём конуса.

### Ответы:

Вариант 1. 1.  $24 \text{ см}^3$ . 2.  $16\pi a^3$ .

Вариант 2. 1.  $20,25 \text{ см}^3$ . 2.  $\frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{27}$ .

## § 4. ОБЪЁМ ШАРА И ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ

### Уроки № 29—31

**Тема уроков: Объём шара. Объёмы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора. Площадь сферы**

#### Основные задачи уроков

Вывести формулы объёма шара и площади сферы, показать их применение при решении задач, познакомить учащихся с формулами для вычисления объёмов частей шара — шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора.

#### Примерный план проведения уроков

На изучение п. 60 «Объём шара» целесообразно отвести один урок.

Сначала нужно вывести формулу объёма шара, затем показать её применение при решении задач. Доказательство этой формулы с помощью определённого интеграла не вызывает затруднений у учащихся.

Для работы на уроке и дома используются задачи 503—507, вопросы 9—11 к главе V.

В практических приложениях часто указывается диаметр шара, поэтому в процессе решения задач формулу объёма шара полезно записать в таком виде:

$$V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{6} \pi D^3, \text{ где } D \text{ — диаметр шара.}$$

В конце урока провести математический диктант.

**Математический диктант № 5.2**

1. Вычислите объём шара, если его радиус  $R=6$  см (5 см).

2. Вычислите диаметр шара, если его объём  $V=36\pi$  ( $\frac{32\pi}{3}$ ).

3. Объём шара равен  $\frac{256\pi}{3}$  ( $288\pi$ ). Найдите площадь большого круга (длину окружности большого круга).

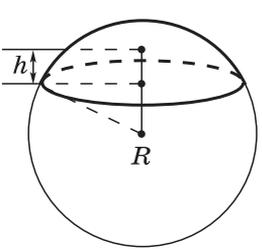
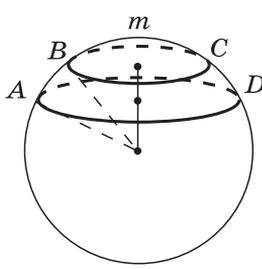
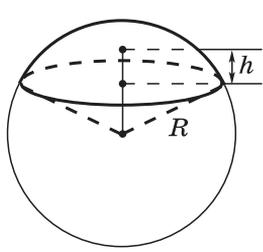
4. В цилиндр вписан шар радиуса  $R=1$ . Найдите отношение  $V_{\text{цил.}}:V_{\text{шара}}$ . ( $R=2$ . Найдите отношение  $V_{\text{шара}}:V_{\text{цил.}}$ )

5. Для вычисления объёма шара ученик предложил свою формулу  $V=2\int_0^R \pi(R^2-x^2) dx$  ( $V=2\int_0^R \pi(R^2-x^2) dx$ ).

Какие он должен дать пояснения, подтверждающие правильность этой формулы?

Содержание п. 61 «Объёмы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора» адресовано в первую очередь учащимся, проявляющим повышенный интерес к математике. На эти вопросы достаточно отвести один урок: нужно ввести понятия шарового сегмента, шарового слоя, шарового сектора и обсудить подходы к выводу формул объёмов этих тел. Далее нужно показать применение этих формул, решая выборочно задачи 508—514. Вывести формулы учащиеся могут самостоятельно во внеурочное время.

В качестве справочного материала на уроках можно использовать слайд 5.10.

<b>5.10</b>		
<b>Шаровой сегмент</b>	<b>Шаровой слой</b>	<b>Шаровой сектор</b>
$V_{\text{сегм}} = \pi h^2 \left( R - \frac{1}{3} h \right)$	$V_{\text{слоя}} = V_{\text{сегм}_{AmD}} - V_{\text{сегм}_{BmC}}$	$V_{\text{сект}} = \frac{2}{3} \pi R^2 h$
		

На изучение п. 62\* «Площадь сферы» отводится один урок, на котором нужно вывести формулу площади сферы. Для классной и домашней работы можно использовать задачи 515—517, вопросы 12—14 к главе V.

Возможен другой вывод формулы площади сферы.

Наряду со сферой радиуса  $R$  рассмотрим сферу с тем же центром и радиусом  $R + \Delta R$  (рис. 5.9). Объем  $\Delta V$  тела, заключённого между двумя сферами, равен разности объёмов шаров с радиусами  $R + \Delta R$  и  $R$ , т. е.

$$\Delta V = \frac{4}{3} \pi (R + \Delta R)^3 - \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (3R^2 \cdot \Delta R + 3R \cdot (\Delta R)^2 + (\Delta R)^3).$$

Разделим  $\Delta V$  на  $\Delta R$  и устремим  $\Delta R$  к нулю. Наглядные представления подсказывают, что при  $\Delta R \rightarrow 0$  отношение  $\frac{\Delta V}{\Delta R}$  стремится к площади  $S$  сферы. Таким образом,

$$S = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{4}{3} \pi (3R^2 + 3R \cdot \Delta R + (\Delta R)^2) = 4\pi R^2.$$

**Задача 509.** Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объём общей части шаров к объёму данного шара?

**Решение.**

1) Обозначим радиус шара через  $R$ , тогда  $AC = CB = \frac{R}{2}$  (рис. 5.10). Общая часть шаров состоит из двух равных шаровых сегментов с высотой  $h = \frac{R}{2}$ .

2) Воспользуемся формулой  $V_{\text{сегм}} = \pi h^2 \left( R - \frac{1}{3} h \right)$ .

При  $h = \frac{R}{2}$  получаем  $V_{\text{сегм}} = \pi \cdot \frac{R^2}{4} \left( R - \frac{1}{3} \cdot \frac{R}{2} \right) = \frac{5\pi R^3}{24}$ .

3)  $V_{\text{общей части}} = \frac{5\pi R^3}{12}$ ;  $\frac{V_{\text{общей части}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{5}{16}$ .

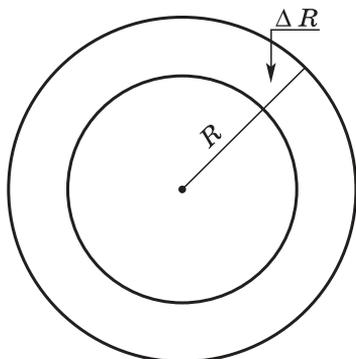


Рис. 5.9

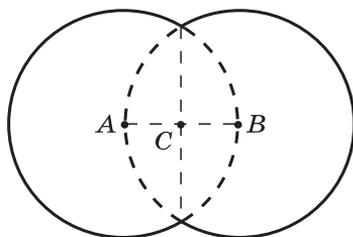


Рис. 5.10

**Задача 517.** Докажите, что площадь сферы равна площади полной поверхности конуса, высота которого равна диаметру сферы, а диаметр основания равен образующей конуса.

Решение.

1) Осевое сечение конуса есть равносторонний треугольник  $ABC$  (рис. 5.11). Обозначим длину отрезка  $AD$  через  $r$ , тогда  $AB = 2r$ ,  $BD = r\sqrt{3}$ .

2) По условию  $R = \frac{BD}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ , где  $R$  — радиус сферы.

3) Вычисляем площади полной поверхности конуса и сферы:

$$S_{\text{кон}} = \pi r \cdot 2r + \pi r^2 = 3\pi r^2, \quad S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{3r^2}{4} = 3\pi r^2.$$

Итак,  $S_{\text{сферы}} = S_{\text{кон}}$ .

**Задача 546.** В усечённый конус, радиусы оснований которого равны  $r$  и  $r_1$ , вписан шар. Найдите отношение объёмов усечённого конуса и шара.

Решение.

1) Осевое сечение усечённого конуса, в который вписан шар, изображено на рисунке 5.12. Пусть  $CE = r_1$ ,  $KD = r$ , тогда  $CM = r_1$ ,  $DM = r$ ,  $DC = r + r_1$ .

2) Проведём  $CF \perp KD$ , тогда  $FD = r - r_1$ . Из  $\triangle CDF$  находим:

$$CF = \sqrt{(r + r_1)^2 - (r - r_1)^2} = 2\sqrt{rr_1}.$$

3) Найдём радиус шара:  $R = \frac{EK}{2} = \frac{CF}{2} = \sqrt{rr_1}$ . Используя формулы объёмов усечённого конуса и шара, получаем

$$\frac{V_{\text{усеч. кон}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot 2\sqrt{rr_1}(r^2 + rr_1 + r_1^2)}{\frac{4}{3}\pi(\sqrt{rr_1})^3} = \frac{r^2 + rr_1 + r_1^2}{2rr_1}.$$

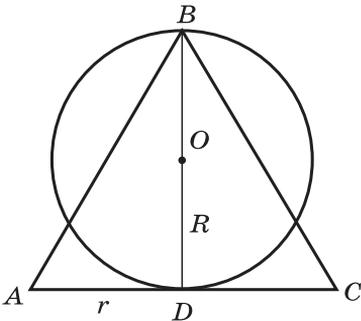


Рис. 5.11

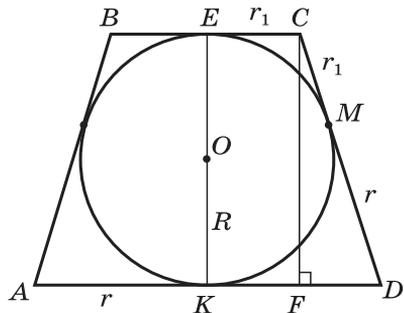


Рис. 5.12

## Урок № 32

### Контрольная работа № 5.1

#### Вариант 1

1. Диаметр шара равен высоте конуса, образующая которого составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Найдите отношение объёмов конуса и шара.

2. Объём цилиндра равен  $96\pi$  см<sup>3</sup>, площадь его осевого сечения —  $48$  см<sup>2</sup>. Найдите площадь сферы, описанной около цилиндра.

#### Вариант 2

1. В конус, осевое сечение которого — правильный треугольник, вписан шар. Найдите отношение площади сферы к площади боковой поверхности конуса.

2. Диаметр шара равен высоте цилиндра, осевое сечение которого является квадратом. Найдите отношение объёмов шара и цилиндра.

#### Ответы:

Вариант 1. 1.  $2:3$ . 2.  $100\pi$  см<sup>2</sup>.

Вариант 2. 1.  $2:3$ . 2.  $2:3$ .

## Урок № 33

### Зачёт № 5. Объёмы тел

#### Карточка 1

1. Расскажите, как вводится понятие объёма тела. Сформулируйте основные свойства объёмов. Запишите формулу объёма прямоугольного параллелепипеда. Докажите теорему об объёме прямой призмы.

2. Каждое ребро правильного тетраэдра равно  $a$ . Найдите объёмы тетраэдра и вписанного в него конуса. (Можно решить задачу для  $a=6$ .)

#### Карточка 2

1. Докажите теорему об объёме цилиндра.

2. Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна  $a$ , плоский угол при вершине равен  $\alpha$ . Найдите объёмы пирамиды и описанного около пирамиды конуса. (Можно решить задачу для  $a=3$ ,  $\alpha=60^\circ$ .)

### Карточка 3

1. Докажите теорему об объёме наклонной призмы.
2. Высота правильной треугольной пирамиды равна  $h$ , двугранный угол при основании равен  $\alpha$ . Найдите объёмы пирамиды и вписанного в пирамиду шара. (Можно решить задачу для  $h=3$ ,  $\alpha=60^\circ$ .)

### Карточка 4

1. Докажите теорему об объёме пирамиды.
2. Осевое сечение конуса — правильный треугольник со стороной  $a$ . Найдите объёмы конуса и описанного около него шара. (Можно решить задачу для  $a=6$ .)

### Карточка 5

1. Докажите теорему об объёме конуса.
2. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна  $a$  и составляет с плоскостью боковой грани угол  $\alpha$ . Найдите объёмы призмы и описанного около неё цилиндра. (Можно решить задачу для  $a=4$ ,  $\alpha=30^\circ$ .)

### Карточка 6

1. Докажите теорему об объёме шара.
2. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно  $a$  и составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найдите объёмы пирамиды и вписанного в пирамиду конуса. (Можно решить задачу для  $a=2$ ,  $\alpha=60^\circ$ .)

## § 1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ

## Урок № 34

Тема урока: Понятие вектора.  
Равенство векторов

## Основные задачи урока

Ввести определения вектора в пространстве и равенства векторов. Рассмотреть связанные с этими понятиями обозначения.

При подготовке к этому уроку, а также к урокам № 35 и № 36 учителю необходимо просмотреть изложение теоретического материала, связанного с векторами, в учебнике геометрии для 7—9 классов, поскольку в учебнике для 10—11 классов некоторые вопросы теории изложены достаточно кратко.

## Примерный план проведения урока

1. Используя текст и рисунок 153, *а*, *б* учебника, ввести понятие вектора в пространстве, обозначения вектора, его длины, понятие нулевого вектора. Обратить внимание на тот факт, что при переходе от плоскости к пространству определения не изменились. Полезно сделать краткие записи обозначения векторов и их длин:

$$\overrightarrow{AB}, |\overrightarrow{AB}|, \vec{a}, |\vec{a}|, \vec{0}.$$

2. Ввести определения коллинеарных, сонаправленных и противоположно направленных векторов. Для иллюстрации использовать рисунок 154 учебника и сделать записи:  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ,  $\vec{a} \downarrow \vec{b}$ .

3. Используя рисунок 155, *а*, *б* учебника, отметить связь изучаемых понятий с курсом физики.

4. Ввести определение равных векторов:

$$\vec{a} = \vec{b}, \text{ если } \vec{a} \uparrow \vec{b} \text{ и } |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

5. Отметить, что от любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один. Объяснить, как сделать соответствующее построение.

6. Для работы на уроке и дома можно использовать задачи 557—563.

Решая задачи на уроке, ответы на многие вопросы можно дать и устно (в частности, по задачам 559, 560, 563 с помощью рисунков 157, 158 учебника), но они должны быть обоснованными. Так, например, при решении задачи 557 используется свойство средней линии треугольника; при решении задач 559 и 563 — свойства граней и диагоналей параллелепипеда; при решении задачи 560 используется определение или признак параллелограмма.

## **§ 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО**

### **Урок № 35**

#### **Тема урока: Сложение и вычитание векторов. Сумма нескольких векторов**

##### **Основные задачи урока**

Рассмотреть правила треугольника и параллелограмма сложения векторов в пространстве, переместительный и сочетательный законы сложения, два способа построения разности двух векторов, правило сложения нескольких векторов в пространстве.

##### **Примерный план проведения урока**

1. Повторить теоретические вопросы, изученные на предыдущем уроке. Провести фронтальный опрос учащихся с использованием слайда 6.1.

2. Ввести правило треугольника сложения двух векторов. Используя рисунки 159 и 160 учебника, прокомментировать нахождение суммы двух векторов в зависимости от их взаимного расположения.

3. Напомнить известное из курса планиметрии и часто используемое в физике правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов (рис. 161 учебника).

4. Рассмотреть переместительный и сочетательный законы сложения векторов в пространстве.

5. Ввести понятие разности векторов. Используя рисунок 163,  $a$ ,  $b$  учебника, рассказать о двух способах построения разности двух векторов. Разъяснить смысл записи  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ . Полезно использовать слайд 6.2, на котором рамкой выделены два равенства, связанные с правилами нахождения суммы и разности двух векторов. Эти правила удобно применять при нахождении суммы

нескольких векторов, не прибегая к рисункам. (Обратить внимание на расположение букв в этих равенствах.)

6. Рассмотреть правило многоугольника нахождения суммы нескольких векторов. Подчеркнуть, что многоугольник, который получается при построении суммы нескольких векторов, может оказаться пространственным, т. е. не все его вершины лежат в одной плоскости.

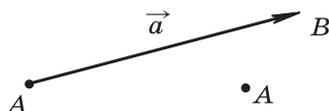
## Векторы

6.1

1. Вектор, его длина:

$$\overrightarrow{AB}, \vec{a}, |\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|;$$

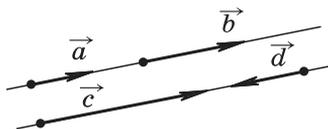
$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}, |\vec{0}| = 0.$$



2. Коллинеарные векторы:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}.$$

$$\vec{a} \uparrow \vec{b}, \vec{a} \uparrow \vec{c}, \vec{b} \downarrow \vec{d}.$$

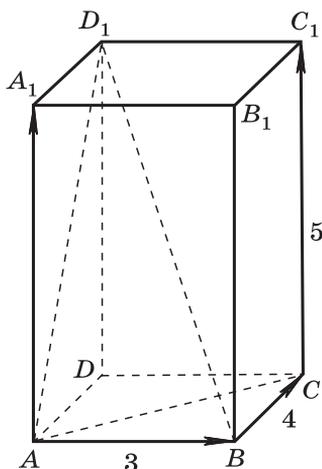


3. Равные векторы:  $\vec{a} = \vec{b}$ , если  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ .

4.  $ABCA_1B_1C_1D_1$  — прямоугольный параллелепипед.  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ ,  $CC_1 = 5$ .

а) Назовите векторы, равные векторам  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CC_1}$ .

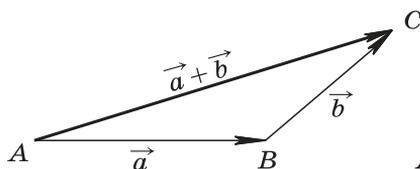
б) Найдите длины векторов  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AA_1}$ ,  $\overrightarrow{AD_1}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BD_1}$ .



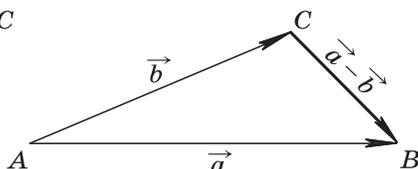
1. Сумма и разность векторов:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$$

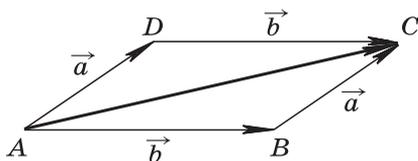


$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$



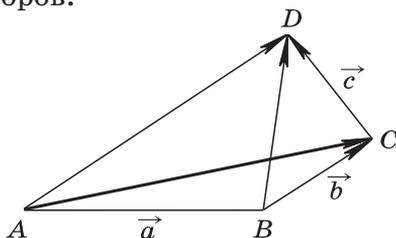
$$\vec{CB} = \vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{BC} = \vec{b} - \vec{a}.$$

2. Законы сложения векторов:



$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{AC} = \vec{b} + \vec{a}, \\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Переместительный закон



$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{AD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}, \\ \vec{BD} = \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{AD} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Сочетательный закон

7. Для работы в классе и дома можно использовать выборочно задачи 564—579.

**Задача 565 а).** Дан тетраэдр  $ABCD$ . Докажите, что  $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AC} + \vec{CD}$ .

**Решение.**  $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$ ,  $\vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$ , следовательно,  $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AC} + \vec{CD}$  (рис. 6.1).

**Задача 567.** Нарисуйте параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и обозначьте векторы  $\vec{C_1 D_1}$ ,  $\vec{B A_1}$ ,  $\vec{A D}$  соответственно через  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .

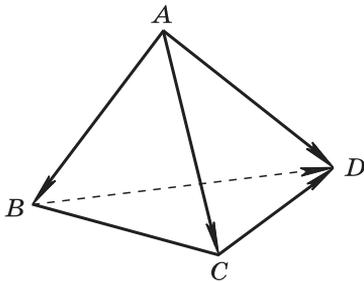


Рис. 6.1

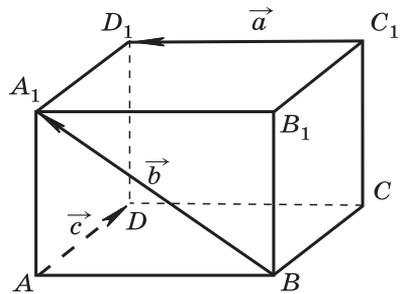


Рис. 6.2

Изобразите на рисунке векторы:

- а)  $\vec{a} - \vec{b}$ ; б)  $\vec{a} - \vec{c}$ ; в)  $\vec{b} - \vec{a}$ ; г)  $\vec{c} - \vec{b}$ ; д)  $\vec{c} - \vec{a}$  (рис. 6.2).

Решение.

а)  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{C_1D_1} - \vec{BA_1} = \vec{BA} - \vec{BA_1} = \vec{A_1A}$ ;

б)  $\vec{a} - \vec{c} = \vec{C_1D_1} - \vec{AD} = \vec{BA} - \vec{BC} = \vec{CA}$ ;

в)  $\vec{b} - \vec{a} = \vec{BA_1} - \vec{C_1D_1} = \vec{BA_1} - \vec{BA} = \vec{AA_1}$ ;

г)  $\vec{c} - \vec{b} = \vec{AD} - \vec{BA_1} = \vec{BC} - \vec{BA_1} = \vec{A_1C}$ ;

д)  $\vec{c} - \vec{a} = \vec{AD} - \vec{C_1D_1} = \vec{BC} - \vec{BA} = \vec{AC}$ .

**Задача 568 а).** Пусть  $ABCD$  — параллелограмм, а  $O$  — произвольная точка пространства. Докажите, что

$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OD}.$$

Решение.  $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$  (рис. 6.3).  $\vec{OC} - \vec{OD} = \vec{DC}$ . Так как  $ABCD$  — параллелограмм, то  $\vec{AB} = \vec{DC}$ , следовательно,  $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OD}$ .

**Задача 570 а).** В пространстве даны четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Назовите вектор с началом и концом в данных точках, равный сумме векторов  $(\vec{AB} + \vec{CA} + \vec{DC}) + (\vec{BC} + \vec{CD})$ .

Решение.  $(\vec{AB} + \vec{CA} + \vec{DC}) + (\vec{BC} + \vec{CD}) =$   
 $= (\vec{AB} + \vec{DC} + \vec{CA}) + \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{DA}) + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{DA} = \vec{AA} = \vec{0}$ .

**Задача 571 а).** Дан прямоугольный параллелепипед  $KLMNK_1L_1M_1N_1$ . Докажите, что  $|\vec{MK} + \vec{MM_1}| = |\vec{MK} - \vec{MM_1}|$ .

Решение.  $|\vec{MK} + \vec{MM_1}| = |\vec{MK_1}| = MK_1$  (рис. 6.4).

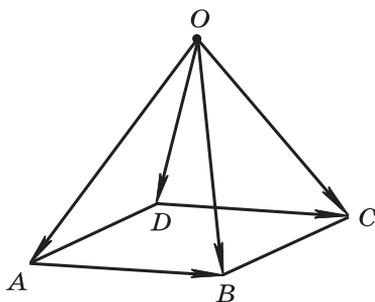


Рис. 6.3

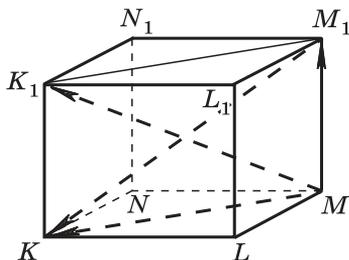


Рис. 6.4

$|\vec{MK} - \vec{MM}_1| = |\vec{M}_1K| = M_1K$ . Так как диагонали  $MK_1$  и  $M_1K$  прямоугольного параллелепипеда равны, то

$$|\vec{MK} + \vec{MM}_1| = |\vec{MK} - \vec{MM}_1|.$$

**Задача 573 а).** Даны точки  $A, B, C$  и  $D$ . Представьте вектор  $\vec{AB}$  в виде алгебраической суммы векторов  $\vec{AC}, \vec{DC}, \vec{BD}$ .

Решение. Так как  $\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DC} = \vec{AC}$ , то

$$\vec{AB} = \vec{AC} - \vec{BD} - \vec{DC}.$$

**Задача 575.** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Докажите, что  $\vec{OA} + \vec{OC}_1 = \vec{OC} + \vec{OA}_1$ , где  $O$  — произвольная точка пространства.

Решение. Посмотрев на изображение параллелепипеда, замечаем, что  $\vec{A_1A} = \vec{C_1C}$ , или  $\vec{OA} - \vec{OA}_1 = \vec{OC} - \vec{OC}_1$ , откуда  $\vec{OA} + \vec{OC}_1 = \vec{OC} + \vec{OA}_1$  ( $O$  — произвольная точка пространства).

**Задача 576 а).** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Укажите вектор  $\vec{x}$ , начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, такой, что

$$\vec{DC} + \vec{D_1A_1} + \vec{CD_1} + \vec{x} + \vec{A_1C_1} = \vec{DB}.$$

Решение. Заметим, что  $\vec{DC} + \vec{CD_1} = \vec{DD_1}$ ,  
 $\vec{D_1A_1} + \vec{A_1C_1} = \vec{D_1C_1}$ ,  $\vec{DD_1} + \vec{D_1C_1} = \vec{DC_1}$ .

Таким образом, надо указать вектор  $\vec{x}$ , такой, что  $\vec{x} + \vec{DC_1} = \vec{DB}$ , откуда  $\vec{x} = \vec{DB} - \vec{DC_1}$ , или  $\vec{x} = \vec{C_1B}$ .

**Задача 577 а).** Дана треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ . Укажите вектор  $\vec{x}$ , начало и конец которого являются вершинами призмы, такой, что  $\vec{AA}_1 + \vec{B_1C} - \vec{x} = \vec{BA}$ .

**Решение.**

$\vec{AA}_1 + \vec{B_1C} = \vec{BB_1} + \vec{B_1C} = \vec{BC}$   
(рис. 6.5). Поэтому нужно найти вектор  $\vec{x}$ , такой, что  $\vec{BC} - \vec{x} = \vec{BA}$ . Из этого равенства находим  $\vec{x} = \vec{BC} - \vec{BA}$ , или  $\vec{x} = \vec{AC}$ .

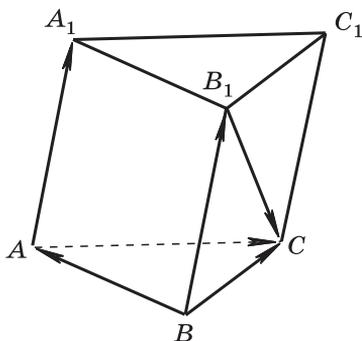


Рис. 6.5

## Урок № 36

### Тема урока: Умножение вектора на число

#### Основные задачи урока

Рассмотреть действие умножения вектора на число и основные свойства этого действия.

#### Примерный план проведения урока

1. Повторить теоретические вопросы, изученные на предыдущем уроке: правило параллелограмма, переместительный и сочетательный законы сложения векторов в пространстве.

2. Выборочно проверить решения задач из домашней работы.

3. Сформулировать правило умножения вектора на число:

$$k \cdot \vec{a} = \vec{b}; \text{ если } \vec{a} \neq \vec{0}, \text{ то } |\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|,$$

$$\vec{a} \uparrow \vec{b} \text{ при } k > 0; \vec{a} \downarrow \vec{b} \text{ при } k < 0;$$

$$\text{если } \vec{a} = \vec{0}, \text{ то } \vec{b} = \vec{0} \text{ для любого числа } k.$$

4. Опираясь на текст учебника, рассмотреть основные свойства умножения вектора на число. Полезно проиллюстрировать эти свойства на примерах, приведённых в слайде 6.3.

5. Для работы в классе и дома можно использовать задачи 580—591.

**Задача 582 а).** Точки  $E$  и  $F$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$ , а  $O$  — произвольная точка

пространства. Выразите вектор  $\vec{OA} - \vec{OC}$  через вектор  $\vec{EF}$ .

Решение.  $\vec{OA} - \vec{OC} = \vec{CA}$ .  
 Так как  $EF$  — средняя линия треугольника  $ABC$  (рис. 6.6),  
 то  $EF \parallel AC$  и  $EF = \frac{1}{2} AC$ . По-  
 этому  $\vec{EF} = -\frac{1}{2} \vec{CA}$ ,  $\vec{CA} = -2\vec{EF}$ ,  
 $\vec{OA} - \vec{OC} = -2\vec{EF}$ .

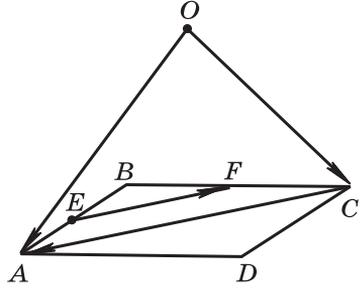


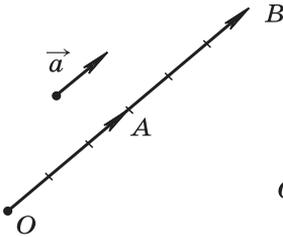
Рис. 6.6

**Умножение вектора на число**

**6.3**

**Сочетательный закон**

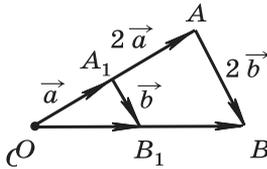
$$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$$



$$\begin{aligned} \vec{OA} &= 3\vec{a} \\ \vec{OB} &= 6\vec{a} \\ \vec{OB} &= 2\vec{OA} = \\ &= 2 \cdot (3\vec{a}) \\ (2 \cdot 3)\vec{a} &= 2 \cdot (3\vec{a}) \end{aligned}$$

**Первый распределительный закон**

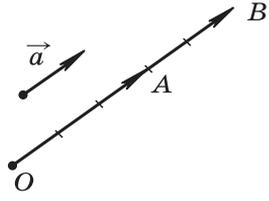
$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$



$$\begin{aligned} \vec{OB} &= 2\vec{OB}_1 = \\ &= 2(\vec{a} + \vec{b}) \\ \vec{OB} &= \vec{OA} + \vec{AB} \\ \vec{OB} &= 2\vec{a} + 2\vec{b} \\ 2(\vec{a} + \vec{b}) &= \\ &= 2\vec{a} + 2\vec{b} \end{aligned}$$

**Второй распределительный закон**

$$(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$



$$\begin{aligned} \vec{OB} &= 5\vec{a} \\ \vec{OB} &= \vec{OA} + \vec{AB} \\ \vec{OB} &= 3\vec{a} + 2\vec{a} \\ (3+2)\vec{a} &= 3\vec{a} + 2\vec{a} \end{aligned}$$

**Задача 584 а).** Упростите выражение

$$2(\vec{m} + \vec{n}) - 3(4\vec{m} - \vec{n}) + \vec{m}.$$

Решение.  $2(\vec{m} + \vec{n}) - 3(4\vec{m} - \vec{n}) + \vec{m} = 2\vec{m} + 2\vec{n} - 12\vec{m} + 3\vec{n} + \vec{m} = -9\vec{m} + 5\vec{n}.$

**Задача 585.** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Докажите, что  $\vec{AC}_1 + \vec{B_1 D} = 2\vec{BC}.$

Решение. Из рисунка 6.7 видно, что

$$\begin{aligned} \vec{AC}_1 + \vec{B_1D} &= 2\vec{AO} + 2\vec{OD} = \\ &= 2(\vec{AO} + \vec{OD}) = 2\vec{AD} = 2\vec{BC}. \end{aligned}$$

**Задача 590.** Векторы  $\vec{a} + 2\vec{b}$  и  $\vec{a} - 3\vec{b}$  коллинеарны.

Докажите, что векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны.

Решение. Допустим, что векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны, тогда  $\vec{a} + 2\vec{b} \neq \vec{0}$ , и поэтому существует число  $k$ , такое, что  $\vec{a} - 3\vec{b} = k(\vec{a} + 2\vec{b})$ , откуда следует, что  $2k\vec{b} + 3\vec{b} = \vec{a} - k\vec{a}$ ,  $\vec{b}(2k + 3) = \vec{a}(1 - k)$ . Если  $2k + 3 \neq 0$ , то  $\vec{b} = \frac{1-k}{2k+3}\vec{a}$ . Если  $2k + 3 = 0$ , т. е.  $k = -1,5$ , то  $1 - k \neq 0$ , следовательно,  $\vec{a} = \frac{2k+3}{1-k}\vec{b}$ . В любом случае полученное равенство показывает, что векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны. Получили противоречие.

Итак, наше предположение о том, что векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны, неверно. Следовательно, векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны.

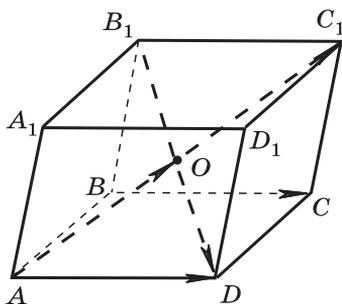


Рис. 6.7

## § 3. КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

### Урок № 37

#### Тема урока: Компланарные векторы. Правило параллелепипеда

##### Основные задачи урока

Ввести определение компланарных векторов, рассмотреть признак компланарности трёх векторов и правило параллелепипеда сложения трёх некопланарных векторов.

При проведении этого и следующего уроков необходимо учитывать, что, в отличие от трёх предыдущих уроков, здесь вводятся новые для учащихся понятия, связанные с векторами.

### Примерный план проведения урока

1. Сформулировать определение компланарных векторов. Используя рисунок 167 учебника, привести примеры компланарных векторов, например  $\overrightarrow{BB_1}$ ,  $\overrightarrow{OD}$  и  $\overrightarrow{OE}$ , а также примеры некопланарных векторов, например  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  и  $\overrightarrow{OC}$ .

2. Рассмотреть признак компланарности трёх векторов, опираясь на рисунок 168 учебника: если вектор  $\vec{c}$  можно разложить по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , т. е. представить в виде  $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$ , где  $x$  и  $y$  — некоторые числа, то векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны.

Доказательство опирается на тот факт, что векторы, равные  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  и отложенные от одной и той же точки  $O$ , лежат в одной плоскости.

3. В учебнике предлагается самостоятельно доказать справедливость обратного утверждения: если векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны, а векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны, то вектор  $\vec{c}$  можно разложить по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Достаточно ограничиться доказательством того, что вектор  $\vec{c}$  можно разложить по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , используя рисунок 6.8.

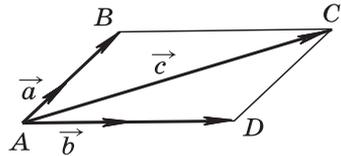


Рис. 6.8

По условию векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны. Если отложить их от точки  $A$ , они будут лежать в одной плоскости. Построим параллелограмм  $ABCD$  так, что  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ , тогда  $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ .

Векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\vec{a}$  коллинеарны, причём  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Поэтому существует число  $x$ , такое, что  $\overrightarrow{AB} = x \cdot \vec{a}$ . Аналогично получаем  $\overrightarrow{AD} = y \cdot \vec{b}$ , где  $y$  — некоторое число. Итак,

$$\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}.$$

Тем самым доказано, что вектор  $\vec{c}$  можно разложить по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Утверждение о единственности коэффициентов разложения  $x$  и  $y$  можно предложить наиболее подготовленным учащимся доказать дома.

4. Изучить по тексту учебника правило параллелепипеда нахождения суммы трёх некопланарных векторов.

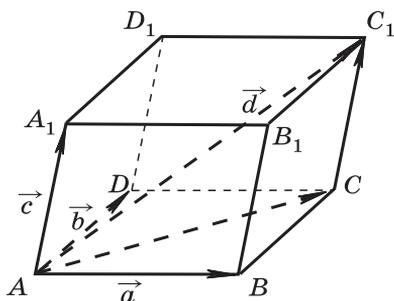


Рис. 6.9

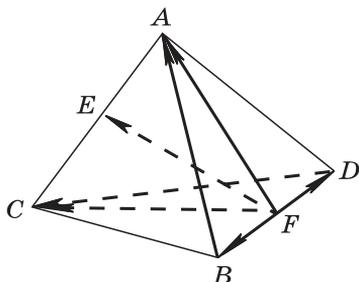


Рис. 6.10

Полезно изобразить параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , длины рёбер  $AB$ ,  $AD$  и  $AA_1$  которого равны  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$  и  $|\vec{c}|$ . Используя рисунок 6.9, получаем

$$\vec{AC}_1 = \vec{AC} + \vec{CC}_1 = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CC}_1, \text{ т. е. } \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

5. Для работы на уроке и дома можно использовать задачи 592—596, 605, 624, 625.

**Задача 593.** Точки  $E$  и  $F$  — середины рёбер  $AC$  и  $BD$  тетраэдра  $ABCD$  (рис. 6.10). Докажите, что  $2\vec{FE} = \vec{BA} + \vec{DC}$ . Компланарны ли векторы  $\vec{FE}$ ,  $\vec{BA}$  и  $\vec{DC}$ ?

**Решение.** Так как точка  $E$  — середина отрезка  $AC$ , то  $\vec{FE} = \frac{1}{2}(\vec{FA} + \vec{FC})$ , откуда  $2\vec{FE} = \vec{FA} + \vec{FC}$ , или

$$2\vec{FE} = (\vec{FB} + \vec{BA}) + (\vec{FD} + \vec{DC}) = (\vec{BA} + \vec{DC}) + (\vec{FB} + \vec{FD}).$$

Точка  $F$  — середина отрезка  $BD$ , поэтому  $\vec{FB} + \vec{FD} = \vec{0}$ , и, следовательно,  $2\vec{FE} = \vec{BA} + \vec{DC}$ .

Поскольку вектор  $\vec{FE}$  можно разложить по векторам  $\vec{BA}$  и  $\vec{DC}$ , то векторы  $\vec{FE}$ ,  $\vec{BA}$  и  $\vec{DC}$  компланарны.

## Урок № 38

### Тема урока: Разложение вектора по трём некомпланарным векторам

#### Основные задачи урока

Рассмотреть теорему о разложении вектора по трём некомпланарным векторам, решить несколько задач на разложение вектора по трём некомпланарным векторам.

### Примерный план проведения урока

1. Ввести понятие разложения вектора по трём некомпланарным векторам. Пусть  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  — данные некомпланарные векторы. Если вектор  $\vec{p}$  представлен в виде  $\vec{p} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$ , где  $x$ ,  $y$  и  $z$  — некоторые числа, то говорят, что вектор  $\vec{p}$  разложен по векторам  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ . Числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  называются коэффициентами разложения.

2. Изучить по тексту учебника теорему о разложении любого вектора по трём данным некомпланарным векторам. Полное доказательство этой теоремы, состоящее из двух частей (доказательство возможности разложения и доказательство единственности коэффициентов разложения), можно адресовать наиболее подготовленным учащимся, они могут изучить его во внеурочное время.

3. Решить несколько задач на применение правила параллелепипеда и на разложение вектора по трём некомпланарным векторам. Для работы на уроке и дома можно использовать задачи 597—604, 606, 607.

**Задача 598.** Диагонали параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  пересекаются в точке  $O$ . Разложите векторы  $\vec{CD}$  и  $\vec{D_1 O}$  по векторам  $\vec{AA_1}$ ,  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$ .

Решение.

1) Так как  $\vec{CD} = -\vec{AB}$ , то разложение вектора  $\vec{CD}$  по векторам  $\vec{AA_1}$ ,  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$  имеет вид  $\vec{CD} = 0 \cdot \vec{AA_1} - \vec{AB} + 0 \cdot \vec{AD}$  (рис. 6.11).

2) По правилу параллелепипеда  $\vec{D_1 B} = \vec{D_1 D} + \vec{D_1 C_1} + \vec{D_1 A_1}$ .

Но  $\vec{D_1 D} = -\vec{AA_1}$ ,  $\vec{D_1 C_1} = \vec{AB}$ ,  $\vec{D_1 A_1} = -\vec{AD}$ , поэтому

$$\vec{D_1 B} = -\vec{AA_1} + \vec{AB} - \vec{AD}.$$

Так как  $\vec{D_1 O} = \frac{1}{2} \vec{D_1 B}$ , то  $\vec{D_1 O} = -\frac{1}{2} \vec{AA_1} + \frac{1}{2} \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AD}$ .

**Задача 600.** Основанием пирамиды с вершиной  $O$  является параллелограмм  $ABCD$ , диагонали которого пересекаются в точке  $M$ . Разложите векторы  $\vec{OD}$  и  $\vec{OM}$  по векторам  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$  и  $\vec{c} = \vec{OC}$ .

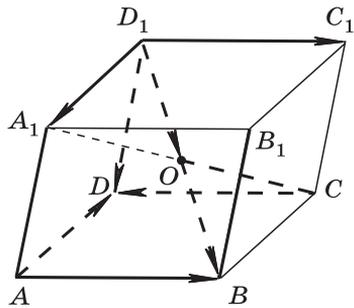


Рис. 6.11

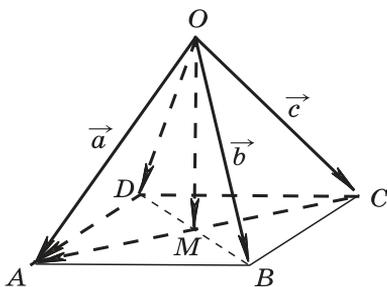


Рис. 6.12

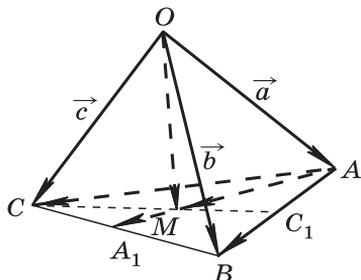


Рис. 6.13

Решение.

1) Воспользуемся равенством  $\vec{OD} = \vec{OA} - \vec{DA}$  (рис. 6.12). Так как  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{DA} = \vec{CB} = \vec{b} - \vec{c}$ , то  $\vec{OD} = \vec{a} - (\vec{b} - \vec{c})$ . Таким образом,  $\vec{OD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

$$2) \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}) = \frac{1}{2}\vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

**Задача 603.** Докажите, что если  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ , а  $O$  — произвольная точка пространства, то  $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ .

Решение. В учебнике приведено решение этой задачи. Решим её другим способом (рис. 6.13).

Пусть  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$ . Очевидно, что  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AA}_1 = \vec{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\vec{AC} + \vec{AB}}{2} = \vec{OA} + \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{AB})$ .

Так как  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a}$ ,  $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ , то

$$\vec{OM} = \vec{a} + \frac{1}{3}((\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} - \vec{a})) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}.$$

## Урок № 39

**Тема урока: Повторение теории и решение задач**

## Урок № 40

**Зачёт № 6. Векторы в пространстве**

### Вопросы теории

1. Сформулируйте определения вектора, его длины, коллинеарности двух ненулевых векторов, равенства векторов. Проиллюстрируйте их, используя изображение параллелепипеда.

2. Расскажите о правиле треугольника сложения двух векторов, переместительном и сочетательном законах сложения векторов, правиле параллелограмма сложения двух векторов. Проиллюстрируйте эти правила на рисунках.

3. Расскажите о правиле многоугольника сложения нескольких векторов. Проиллюстрируйте его на рисунке.

4. Сформулируйте определение произведения вектора  $\vec{a}$  на число  $k$ ; сочетательный, первый и второй распределительные законы умножения вектора на число. Проиллюстрируйте их на примерах.

5. Сформулируйте определение компланарных векторов. Приведите примеры компланарных и некомпланарных векторов, используя изображение параллелепипеда. Сформулируйте и докажите утверждение, выражающее признак компланарности трёх векторов.

6. Расскажите о правиле параллелепипеда сложения трёх некомпланарных векторов. Проиллюстрируйте его на рисунке. Сформулируйте теорему о разложении вектора по трём некомпланарным векторам.

### **Задачи**

Для проверки умений и навыков в решении задач можно использовать:

1. Вопросы к главе VI.

2. Некоторые типичные задачи к § 1, 2, 3, например 560, 567, 572, 577, 589, 599, 600, 603, 605, 607, 609.

3. Дополнительные задачи к главе VI: 613, 614, 616, 617, 621, 628.

## § 1. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ И КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

## Урок № 41

## Тема урока: Прямоугольная система координат в пространстве

## Основные задачи урока

Ввести понятие прямоугольной системы координат в пространстве; выработать умения строить точку по заданным её координатам и находить координаты точки, изображённой в заданной системе координат.

## Примерный план проведения урока

1. Объяснить, как задаётся прямоугольная система координат в пространстве. Прямоугольная система координат в пространстве задана, если выбрана точка — начало координат, через эту точку проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из которых выбрано направление (оно обозначается стрелкой), и задана единица измерения отрезков.

2. Используя рисунок 174 учебника, обратить внимание на обозначения и названия осей координат в пространстве, сопоставить эти обозначения с соответствующими обозначениями осей координат на плоскости, известными из курсов алгебры и геометрии 7—9 классов. (См.: Атанасян Л. С. и др. Геометрия, 7—9.— М.: Просвещение.)

3. Подчеркнуть, что в прямоугольной системе координат каждой точке  $M$  пространства соответствует тройка чисел, которые называются её координатами. Они определяются аналогично координатам точек на плоскости. Для определения координат точки  $M$  в пространстве через эту точку проводят три плоскости, перпендикулярные к осям координат. Затем, используя точки  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  пересечения этих плоскостей с осями координат, находят координаты точки  $M$  (рис. 175 учебника).

4. На уроке полезно выполнить упражнения двух типов: на нахождение координат данной точки по чертежу и на построение точки по заданным её координатам. Для этого можно использовать рисунок 176 учебника.

Например, чтобы найти координаты точки  $A$  на рисунке 176, проводим через эту точку перпендикуляр к плоскости  $Oxy$  (обозначим его  $AA_1$ ), а затем через точку  $A_1$  перпендикуляры к осям  $Ox$  и  $Oy$  (обозначим их  $A_1M_1$ ,  $A_1M_2$ ). Основания этих перпендикуляров (точки  $M_1$  и  $M_2$ ) дают возможность найти абсциссу и ординату точки  $A$ , а длина перпендикуляра  $AA_1$ , взятая со знаком «+» или «-» в зависимости от положения точки  $A$ , даёт аппликату точки  $A$ .

Следует объяснить, почему найденные таким образом абсцисса, ордината и аппликата точки  $A$  соответствуют данному выше определению координат точки: плоскость  $AA_1M_1$  перпендикулярна к оси  $Ox$ , плоскость  $AA_1M_2$  перпендикулярна к оси  $Oy$ , а плоскость, проходящая через точку  $A$  и перпендикулярная к оси  $Oz$ , пересекает ось  $Oz$  в точке  $M_3$ , такой, что  $OM_3 = AA_1$ , поэтому точки  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  и есть те самые точки, которые позволяют найти координаты точки  $A$ .

5. Необходимо уделить внимание нахождению координат точек, лежащих в координатных плоскостях или на осях координат. Если точка  $M(x; y; z)$  лежит, например, на оси  $Oz$ , то  $x = y = 0$ ; если точка  $M(x; y; z)$  лежит в плоскости  $Oxz$ , то  $y = 0$ .

6. Для закрепления навыков нахождения координат точек и построения точек по заданным их координатам можно использовать задачи 637—639. При их решении целесообразно в некоторых случаях построить точки на рисунке по заданным их координатам, хотя на поставленные вопросы можно ответить устно, без рисунков. Так, например, в задаче 638, спроектировав заданную точку  $A$  на плоскость  $Oxy$ , получим точку  $A_1$ , у которой аппликата равна нулю, а абсцисса и ордината такие же, как и у точки  $A$ .

**Задача 638 а).** Дана точка  $A(2; -3; 5)$ . Найдите координаты проекций этой точки на координатные плоскости.

**Решение.** Изобразим на рисунке систему координат  $Oxyz$  и построим точку  $A$  по заданным её координатам. С этой целью отложим на положительных полуосях  $Ox$  и  $Oz$  отрезки  $OM_1 = 2$  и  $OM_3 = 5$ , а на отрицательной полуоси  $Oy$  отрезок  $OM_2 = 3$ . Через каждую из точек  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  проведём плоскость, перпендикулярную той оси координат, на которой лежит эта точка. В результате получится прямоугольный параллелепипед (рис. 7.1). Вершина  $A$  этого параллелепипеда имеет координаты  $(2; -3; 5)$ , а точки  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  являются проекциями точки  $A$  на координатные плоскости. Очевидно, координаты этих точек таковы:  $A_1(2; -3; 0)$ ,  $A_2(0; -3; 5)$ ,  $A_3(2; 0; 5)$ .

Разумеется, координаты точек  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  многие учащиеся могут назвать устно, не выполняя рисунок.

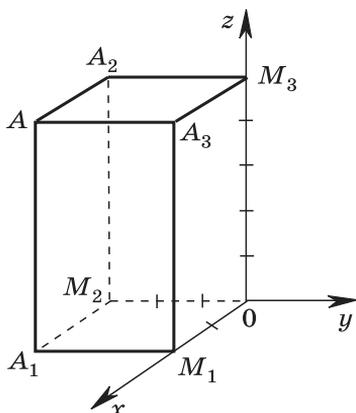


Рис. 7.1

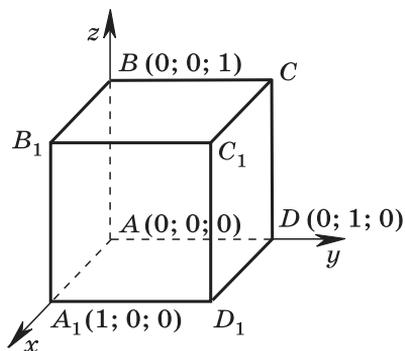


Рис. 7.2

Однако построение точки  $A$  по заданным координатам представляет и самостоятельный интерес, делает более наглядным решение задачи, что особенно важно для слабых учащихся.

**Задача 639.** Даны координаты четырёх вершин куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ :  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(0; 0; 1)$ ,  $D(0; 1; 0)$ ,  $A_1(1; 0; 0)$ . Найдите координаты остальных вершин куба.

**Решение.** Изобразим на рисунке систему координат  $Axyz$  (с началом в точке  $A$ ) и отметим заданные точки  $B$ ,  $D$ ,  $A_1$  (они лежат на осях координат). Через каждую из этих точек проведём плоскость, перпендикулярную той оси координат, на которой лежит эта точка. В результате получится куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 7.2). Видно, что вершины  $C$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  имеют следующие координаты:  $C(0; 1; 1)$ ,  $B_1(1; 0; 1)$ ,  $C_1(1; 1; 1)$ ,  $D_1(1; 1; 0)$ .

Для работы на уроке можно использовать задачи 637а, б, г, 638 (для точки  $A$ ), 639.

Для работы дома — задачи 637д, е, 638 (для точек  $B$  и  $C$ ); вопросы 1—3 к главе VII.

## Урок № 42

### Тема урока: Координаты вектора

#### Основные задачи урока

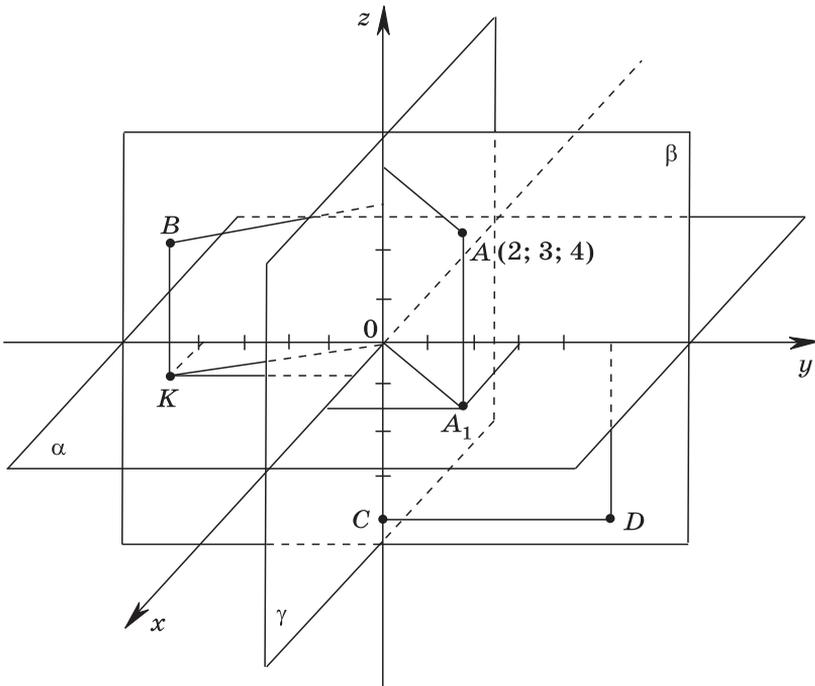
Показать возможность разложения произвольного вектора по координатным векторам  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , ввести понятие координат вектора в данной системе координат, выработать умения и навыки выполнения действий над векторами с заданными координатами.

### Примерный план проведения урока

1. При проверке домашнего задания и повторении материала предыдущего урока целесообразно провести фронтальную работу, используя слайд 7.1 и вопросы 1—3 к главе VII.

2. Ввести координатные векторы  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , а затем напомнить, что в § 3 главы VI было доказано, что любой вектор  $\vec{p}$  в пространстве можно разложить по трём данным некопланарным векторам  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , т. е. представить в виде  $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ , причём коэффициенты разложения, т. е. числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , определяются единственным образом.

#### Координаты точки

**7.1**

1. Объясните, как построить точку  $A$  по её координатам  $(2; 3; 4)$ .

2. Назовите координаты точек  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $K$ .

Поскольку координатные векторы  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  не компланарны, то любой вектор  $\vec{a}$  в пространстве можно единственным образом разложить по координатным векторам  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ :  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  (рис. 177, 178 учебника). Коэффициенты  $x$ ,  $y$  и  $z$  в разложении вектора  $\vec{a}$  называются координатами вектора  $\vec{a}$  в данной системе координат. Координаты вектора  $\vec{a}$  записываются в фигурных скобках после обозначения вектора:  $\vec{a}\{x; y; z\}$ .

3. Для выработки навыков нахождения координат вектора можно воспользоваться рисунком 178 учебника, где изображён прямоугольный параллелепипед и даны его измерения. По рисунку 178, учитывая, что  $OA_1=2$ ,  $OA_2=2$ ,  $OA_3=4$ , находим

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}, \text{ т. е. } \vec{a}\{2; 2; 4\}; \\ \vec{A_3A} &= 2\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}, \text{ т. е. } \vec{A_3A}\{2; 2; 0\}; \\ \vec{i} &= 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}, \text{ т. е. } \vec{i}\{1; 0; 0\} \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

4. Отметим, что нулевой вектор можно представить в виде  $\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$ , поэтому все координаты нулевого вектора равны нулю:  $\vec{0}\{0; 0; 0\}$ .

5. В учебнике даны без обоснования правила действий над векторами с заданными координатами. Приведём доказательства некоторых из этих правил.

Докажем вначале, что координаты равных векторов соответственно равны.

Пусть даны векторы  $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ ,  $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$  и  $\vec{a} = \vec{b}$ . Тогда

$$\begin{aligned}x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} &= x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}, \text{ откуда} \\ (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Так как все координаты нулевого вектора равны 0, то

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 = 0, \quad y_1 - y_2 = 0, \quad z_1 - z_2 = 0, \text{ т. е.} \\ x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2.\end{aligned}$$

6. Докажем, что каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

Пусть  $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$  — данные векторы. Тогда

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\ &= (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что координаты вектора  $\vec{a} + \vec{b}$  равны  $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$ .

7. Докажем, что каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

Пусть даны вектор  $\vec{a}\{x; y; z\}$  и произвольное число  $\alpha$ . Тогда  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\alpha\vec{a} = (\alpha x)\vec{i} + (\alpha y)\vec{j} + (\alpha z)\vec{k}$ . Это означает, что координаты вектора  $\alpha\vec{a}$  равны  $\{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$ .

8. При изучении данного пункта используются задачи 640—652, а также слайды 7.2, 7.3 и вопросы 4—7 к главе VII.

### Действия над векторами с заданными координатами

7.2

$$\begin{aligned} \vec{a} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{a}\{x; y; z\}, \\ \vec{a} &\{x_1; y_1; z_1\}, \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}, \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{c}, \quad \vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}, \\ \vec{a} - \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) - (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\ &= (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}, \\ \vec{a} - \vec{b} &= \vec{d}, \quad \vec{d}\{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}, \\ \alpha\vec{a} &= \vec{m}, \quad \vec{m}\{\alpha x_1; \alpha y_1; \alpha z_1\}. \end{aligned}$$

### Действия над векторами с заданными координатами

7.3

Даны векторы:  $\vec{a}\{-1; 2; 0\}$ ,  $\vec{b}\{0; -5; -2\}$ ,  $\vec{c}\{2; 1; -3\}$ .

Найдите координаты вектора  $\vec{q} = 3\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a}$ .

Решение.  $3\vec{c}\{6; 3; -9\}$ ,  $-2\vec{b}\{0; 10; 4\}$ ,  $\vec{a}\{-1; 2; 0\}$ .

Координаты вектора  $\vec{q}\{x; y; z\}$ :  $x = 6 + 0 - 1 = 5$ ,  $y = 3 + 10 + 2 = 15$ ,  $z = -9 + 4 + 0 = -5$ ;  $\vec{q}\{5; 15; -5\}$ .

В конце урока можно провести самостоятельную работу контролирующего характера.

## Самостоятельная работа № 7.1

### Вариант 1

1. Даны векторы  $\vec{a}\{2; -4; 3\}$  и  $\vec{b}\{-3; \frac{1}{2}; 1\}$ . Найдите координаты вектора  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

2. Даны векторы  $\vec{a}\{1; -2; 0\}$ ,  $\vec{b}\{3; -6; 0\}$  и  $\vec{c}\{0; -3; 4\}$ . Найдите координаты вектора  $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$ .

3. Найдите числа  $m$  и  $n$ , для которых векторы  $\vec{a}\{6; n; 1\}$  и  $\vec{b}\{m; 16; 2\}$  коллинеарны.

### Вариант 2

1. Даны векторы  $\vec{a}\{1; -3; -1\}$  и  $\vec{b}\{-1; 2; 0\}$ . Найдите координаты вектора  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ .

2. Даны векторы  $\vec{a}\{2; 4; -6\}$ ,  $\vec{b}\{-3; 1; 0\}$  и  $\vec{c}\{3; 0; -1\}$ . Найдите координаты вектора  $\vec{p} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ .

3. Найдите числа  $m$  и  $n$ , для которых векторы  $\vec{a}\{-4; m; 2\}$  и  $\vec{b}\{2; -6; n\}$  коллинеарны.

### Ответы:

**Вариант 1.** 1.  $\vec{c}\{-1; -3,5; 4\}$ . 2.  $\vec{p}\{1; 1; -4\}$ . 3.  $m = 12$ ,  $n = 8$ .

**Вариант 2.** 1.  $\vec{c}\{2; -5; -1\}$ . 2.  $\vec{p}\{-10; 0; 4\}$ . 3.  $m = 12$ ,  $n = -1$ .

Приведём решения некоторых задач из учебника.

**Задача 642** (рис. 185). Найдите координаты векторов  $\vec{OA}_1$  и  $\vec{OC}_1$ .

$$\vec{OA}_1 = \vec{OA} + \vec{OO}_1, \quad \vec{OA}_1 = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{OA}_1\{2; 0; 2\}.$$

$$\vec{OC}_1 = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OO}_1, \quad \vec{OC}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{OC}_1\{2; 3; 2\}.$$

**Задача 645** (рис. 186).

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}, \quad \vec{AC} = 2\vec{k} - 4\vec{i}, \quad \vec{AC} = -4\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$\vec{AC}\{-4; 0; 2\}.$$

$$\vec{MN} = -\frac{1}{2}\vec{OA}, \quad \vec{MN} = -\frac{1}{2} \cdot 4\vec{i}, \quad \vec{MN}\{-2; 0; 0\}.$$

$$\begin{aligned} \vec{BM} &= \vec{BA} + \vec{AM} = \vec{OA} - \vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{OA} - \vec{OB} + \frac{1}{2}(\vec{OC} - \vec{OA}) = \\ &= \frac{1}{2}\vec{OA} - \vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC}, \quad \vec{BM} = 2\vec{i} - 9\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{BM}\{2; -9; 1\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{OB} + \vec{BP} = \vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{OB} + \frac{1}{2}(\vec{OC} - \vec{OB}) = \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC}, \\ \vec{OP} &= \frac{1}{2} \cdot 9\vec{j} + \frac{1}{2} \cdot 2\vec{k} = 0\vec{i} + \frac{9}{2}\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{OP} \left\{ 0; \frac{9}{2}; 1 \right\}.\end{aligned}$$

**Задача 647.**

Дано:  $\vec{a}\{-1; 2; 0\}$ ,  $\vec{b}\{0; -5; -2\}$ ,  $\vec{c}\{2; 1; -3\}$ . Найдите координаты вектора  $\vec{p} = 3\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c}$ .

Решение. Сначала находим координаты векторов  $3\vec{b}$  и  $-2\vec{a}$ :  $3\vec{b}\{0; -15; -6\}$  и  $-2\vec{a}\{2; -4; 0\}$ , а затем координаты вектора  $\vec{p}\{x; y; z\}$ :

$$x = 0 + 2 + 2 = 4, \quad y = -15 - 4 + 1 = -18, \quad z = -6 + 0 - 3 = -9.$$

Итак,  $\vec{p}\{4; -18; -9\}$ .

**Задача 651 а).**

Дано:  $\vec{a}\{15; m; 1\}$ ,  $\vec{b}\{18; 12; n\}$ . Найдите числа  $m$  и  $n$ , для которых векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны.

Решение. Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны и  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , то существует число  $k$ , такое, что  $\vec{b} = k\vec{a}$  (п. 67), и обратно: если  $\vec{b} = k\vec{a}$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны. Поэтому нужно найти числа  $m$ ,  $n$  и  $k$ , такие, что  $\vec{b} = k\vec{a}$ , или в координатах:  $18 = 15k$ ,  $12 = mk$ ,  $n = k$ . Отсюда находим

$$k = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}, \quad m = \frac{12}{k} = 10, \quad n = \frac{6}{5}.$$

Следовательно, векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны при

$$m = 10, \quad n = \frac{6}{5}.$$

**Задача 652 д).** Компланарны ли векторы  $\vec{m}\{1; 0; 2\}$ ,  $\vec{n}\{1; 1; -1\}$  и  $\vec{p}\{-1; 2; 4\}$ ?

Решение. Векторы  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  не коллинеарны, так как координаты одного вектора не пропорциональны координатам другого. Если вектор  $\vec{p}$  можно разложить по векторам  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , то векторы  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{p}$  компланарны, а если нельзя, то не компланарны. Таким образом, для решения задачи нужно установить, существуют ли числа  $x$  и  $y$ , такие, что  $\vec{p} = x\vec{m} + y\vec{n}$ .

Запишем это равенство в координатах:

$$-1 = x + y, \quad 2 = y, \quad 4 = 2x - y.$$

Из первого и второго уравнений находим  $x$  и  $y$ :  $x = -3$ ,  $y = 2$ . Но эти значения  $x$  и  $y$  не удовлетворяют

третьему уравнению. Значит, вектор  $\vec{r}$  нельзя разложить по векторам  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , поэтому векторы  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{r}$  не компланарны.

## Урок № 43

### Тема урока: Связь между координатами векторов и координатами точек

#### Основные задачи урока

Ввести понятие радиус-вектора произвольной точки пространства; доказать, что координаты точки равны соответствующим координатам её радиус-вектора, а координаты любого вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала.

#### Примерный план проведения урока

1. Определение радиус-вектора точки дано в учебнике. Его можно сформулировать и в такой форме: вектор, отложенный от начала координат, называется радиус-вектором точки, являющейся концом вектора.

2. При рассмотрении приведённого в учебнике доказательства утверждения: координаты любой точки равны соответствующим координатам её радиус-вектора — можно пояснить, что равенство  $\vec{OM} = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2 + \vec{OM}_3$  имеет место согласно правилу параллелепипеда. Далее доказываются равенства  $\vec{OM}_1 = xi$ ,  $\vec{OM}_2 = yj$ ,  $\vec{OM}_3 = zk$ , и в результате приходим к равенству  $\vec{OM} = xi + yj + zk$ .

По определению числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  являются координатами вектора  $\vec{OM}$ . Тем самым доказано, что координаты  $(x; y; z)$  точки  $M$  равны соответствующим координатам её радиус-вектора  $\vec{OM}$ .

3. Далее следует доказать, что если точки  $A$  и  $B$  имеют координаты  $(x_1; y_1; z_1)$  и  $(x_2; y_2; z_2)$ , то вектор  $\vec{AB}$  имеет координаты  $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ , и перейти к решению задач.

4. Выборочно используются задачи 653—659. Для работы на уроке — задачи 653, 655а, 657. Для работы дома — задачи 654, 655б, 656.

**Задача 657.** Даны точки  $A(3; -1; 5)$ ,  $B(2; 3; -4)$ ,  $C(7; 0; -1)$ ,  $D(8; -4; 8)$ . Докажите, что векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{DC}$  равны.

Решение. Найдём координаты рассматриваемых векторов, используя тот факт, что каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала:  $\overrightarrow{AB} \{-1; 4; -9\}$ ,  $\overrightarrow{DC} \{-1; 4; -9\}$ .

Мы видим, что соответствующие координаты векторов равны, следовательно,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

**Задача 659 а).** Даны точки  $A(-2; -13; 3)$ ,  $B(1; 4; 1)$ ,  $C(-1; -1; -4)$ ,  $D(0; 0; 0)$ . Выясните, лежат ли эти точки в одной плоскости.

Решение.

1) Если данные точки лежат в одной плоскости, то

векторы  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AD}$  компланарны, и обратно: если эти векторы компланарны, то точки  $A, B, C, D$  лежат в одной плоскости (рис. 7.3). Поэтому задача сводится к вопросу: компланарны ли векторы  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AD}$ ?

По координатам данных точек найдём координаты указанных векторов:  $\overrightarrow{AB} \{3; 17; -2\}$ ,  $\overrightarrow{AC} \{1; 12; -7\}$ ,  $\overrightarrow{AD} \{2; 13; -3\}$ .

2) Так как координаты векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  не пропорциональны, то эти векторы не коллинеарны. Поэтому векторы  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AD}$  компланарны в том и только в том случае, когда вектор  $\overrightarrow{AD}$  можно разложить по векторам  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  (п. 68), т. е. когда найдутся числа  $x$  и  $y$ , такие, что

$$\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}. \quad (1)$$

Записывая равенство (1) в координатах, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 17x + 12y = 13 \\ -2x - 7y = -3. \end{cases}$$

3) Если эта система уравнений имеет решение, то равенство (1) выполняется, и, следовательно, точки  $A, B, C, D$  лежат в одной плоскости. В противном случае они не лежат в одной плоскости.

Решив систему, состоящую из первых двух уравнений, получаем  $x = \frac{11}{19}$ ,  $y = \frac{5}{19}$ .

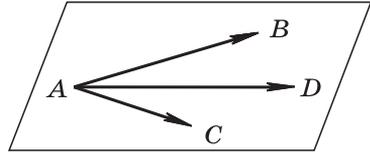


Рис. 7.3

Эти значения  $x$  и  $y$  удовлетворяют третьему уравнению  $-2 \cdot \frac{11}{19} - 7 \cdot \frac{5}{19} = -\frac{22}{19} - \frac{35}{19} = -\frac{57}{19} = -3$ .

Следовательно, точки  $A, B, C, D$  лежат в одной плоскости.

## Уроки № 44—45

### Тема уроков: Простейшие задачи в координатах

#### Основные задачи уроков

Вывести формулы координат середины отрезка, длины вектора через его координаты и расстояния между двумя точками, показать примеры решения стереометрических задач координатно-векторным методом.

#### Примерный план проведения уроков

1. На первом уроке следует рассмотреть решения всех трёх простейших задач, в которых выводятся упомянутые выше формулы. Эти задачи можно назвать базовыми в том смысле, что на них опираются решения многих других задач при применении координатно-векторного метода. Для тренировки в непосредственном использовании полученных формул полезны задачи 660, 661, 663, 666. Слайд 7.4 иллюстрирует идею решения задачи 660.

#### Точка пересечения медиан треугольника

7.4

$M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ ,  
 $O$  — начало координат.

$$A(x_1; y_1; z_1),$$

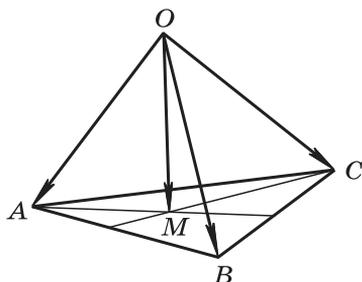
$$B(x_2; y_2; z_2),$$

$$C(x_3; y_3; z_3),$$

$$M(x; y; z),$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

(см. задачу 603).



$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

2. Следующие два урока нужно посвятить выборочно-му решению задач 660—677. В качестве устных упражнений можно использовать вопросы 8—10 к главе VII.

3. В начале второго урока полезно провести **математический диктант** по вопросам, приведённым ниже в двух вариантах (разночтения для второго варианта даны в скобках):

1) На каком расстоянии от плоскости  $Oxy$  ( $Oyz$ ) находится точка  $A(2; -3; -5)$  ( $B(-3; 2; -4)$ )?

2) На каком расстоянии от начала координат находится точка  $A(-3; 4; 0)$  ( $B(3; 0; -4)$ )?

3) Найдите координаты середины отрезка, если концы его имеют координаты  $A(5; 3; 2)$  и  $B(3; -1; -4)$  ( $A(-3; 2; -4)$  и  $B(1; -4; 2)$ ).

4) Найдите длину вектора  $\overrightarrow{AB}$  ( $\overrightarrow{BA}$ ), если  $A(5; 3; 2)$  и  $B(3; -1; -4)$  ( $A(-3; 2; -4)$  и  $B(1; -4; 2)$ ).

4. На третьем уроке данной темы провести самостоятельную работу.

## Самостоятельная работа № 7.2

### Вариант 1

1. Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если  $A(5; -1; 3)$ ,  $B(2; -2; 4)$ .

2. Даны векторы  $\vec{b}\{3; 1; -2\}$  и  $\vec{c}\{1; 4; -3\}$ . Найдите  $|2\vec{b} - \vec{c}|$ .

3. Изобразите систему координат  $Oxyz$  и постройте точку  $A(1; -2; -4)$ . Найдите расстояния от этой точки до координатных плоскостей.

### Вариант 2

1. Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{CD}$ , если  $C(6; 3; -2)$ ,  $D(2; 4; -5)$ .

2. Даны векторы  $\vec{a}\{5; -1; 2\}$  и  $\vec{b}\{3; 2; -4\}$ . Найдите  $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ .

3. Изобразите систему координат  $Oxyz$  и постройте точку  $B(-2; -3; 4)$ . Найдите расстояния от этой точки до координатных плоскостей.

### Ответы:

Вариант 1. 1.  $\overrightarrow{AB}\{-3; -1; 1\}$ .  
2.  $\sqrt{30}$ . 3. 4; 2; 1.

Вариант 2. 1.  $\overrightarrow{CD}\{-4; 1; -3\}$ .  
2.  $3\sqrt{14}$ . 3. 4; 3; 2.

**Задача 660.** Докажите, что точка пересечения медиан треугольника с вершинами

$$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2), C(x_3; y_3; z_3)$$

имеет координаты

$$\left( \frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3} \right).$$

Решение.

1) На слайде 7.4 показана идея решения этой задачи, основанная на использовании формулы, выведенной в задаче 603. Дадим другой вывод этой формулы.

Пусть  $AN$  и  $BK$  — медианы треугольника,  $M$  — точка их пересечения (рис. 7.4). Тогда

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

2) Перепишем это равенство в другом виде:

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{3} ((\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})),$$

где  $O$  — начало координат. Отсюда получаем

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

3) Координаты векторов  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  и  $\overrightarrow{OC}$  равны соответствующим координатам точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , поэтому сумма векторов  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$  имеет координаты

$$\{x_1+x_2+x_3; y_1+y_2+y_3; z_1+z_2+z_3\},$$

а координаты вектора  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$  равны

$$\left( \frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3} \right).$$

Такие же координаты имеет и точка  $M$ , что и требовалось доказать.

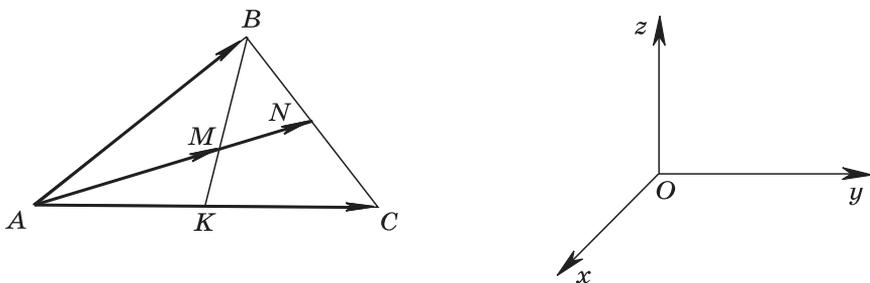


Рис. 7.4

**Задача 662 а).** Середина отрезка  $AB$  лежит на оси  $Ox$ . Найдите  $m$  и  $n$ , если  $A(-3; m; 5)$ ,  $B(2; -2; n)$ .

Решение.

Пусть  $C(x; 0; 0)$  — середина отрезка  $AB$  (рис. 7.5). Воспользуемся формулами для вычисления ординаты и аппликаты середины отрезка:

$$0 = \frac{m-2}{2}, \quad 0 = \frac{5+n}{2}.$$

Отсюда получаем

$$m = 2, \quad n = -5.$$

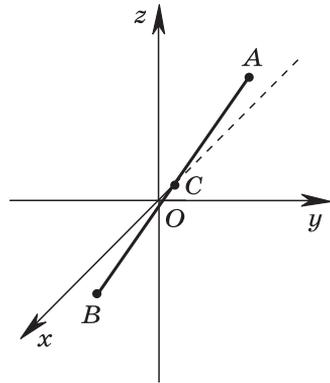


Рис. 7.5

**Задача 668 б).** Определите вид треугольника  $ABC$ , если  $A(3; 7; -4)$ ,  $B(5; -3; 2)$ ,  $C(1; 3; -10)$ .

Решение.

1) Зная координаты вершин  $A, B, C$ , вычисляем длины сторон треугольника:

$$AB = \sqrt{2^2 + (-10)^2 + 6^2} = \sqrt{140},$$

$$AC = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{56},$$

$$BC = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + (-12)^2} = 14.$$

2) Отсюда получаем  $BC^2 = 196$ ,  $AB^2 + AC^2 = 140 + 56 = 196$ , т. е.  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ . Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник  $ABC$  прямоугольный, причём угол  $A$  прямой. Катеты  $AB$  и  $AC$  различной длины, поэтому треугольник  $ABC$  прямоугольный и разносторонний.

**Задача 675 а).** Даны точки  $A(-1; 2; 3)$ ,  $B(-2; 1; 2)$  и  $C(0; -1; 1)$ . Найдите точку, равноудалённую от этих точек и расположенную на координатной плоскости  $Oxy$ .

Решение.

1) Искомая точка  $M$  расположена на координатной плоскости  $Oxy$ , поэтому её аппликата равна нулю:  $M(x; y; 0)$ . Выразим длины отрезков  $MA, MB, MC$  через координаты их концов:

$$MA = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (-3)^2},$$

$$MB = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2 + (-2)^2},$$

$$MC = \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + (-1)^2}.$$

2) По условию  $MA = MB = MC$ . Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 + 9 = (x+2)^2 + (y-1)^2 + 4 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 + 9 = x^2 + (y+1)^2 + 1, \end{cases}$$

которая после приведения подобных членов принимает вид

$$\begin{cases} -2x - 2y = -5 \\ 2x - 6y = -12. \end{cases}$$

Отсюда  $x = \frac{3}{8}$ ,  $y = 2\frac{1}{8}$ . Искомая точка  $M\left(\frac{3}{8}; 2\frac{1}{8}; 0\right)$ .

**Задача 677.** Отрезок  $CD$  длины  $m$  перпендикулярен к плоскости прямоугольного треугольника  $ABC$  с катетами  $AC = b$  и  $BC = a$ . Введите подходящую систему координат и с помощью формулы расстояния между двумя точками найдите расстояние от точки  $D$  до середины гипотенузы этого треугольника.

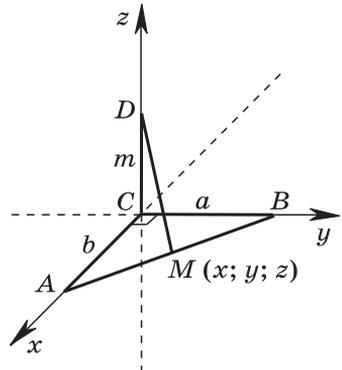


Рис. 7.6

**Решение.** Введём систему координат с началом в точке  $C$ , как показано на рисунке 7.6. В этой системе координаты точек  $A, B, C, D$  таковы:  $A(b; 0; 0)$ ,  $B(0; a; 0)$ ,  $C(0; 0; 0)$ ,  $D(0; 0; m)$ . Пусть точка  $M(x; y; z)$  — середина гипотенузы  $AB$  треугольника  $ABC$ . Используя формулы координат середины отрезка, находим:  $x = \frac{b}{2}$ ,  $y = \frac{a}{2}$ ,  $z = 0$ , т. е.  $M\left(\frac{b}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$ . Зная координаты точек  $M$  и  $D$ , находим искомое расстояние:

$$MD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 4m^2}.$$

## Урок № 47

### Тема урока: Уравнение сферы

#### Основные задачи урока

Вывести уравнение сферы данного радиуса с центром в данной точке; рассмотреть задачи, связанные с уравнением сферы.

#### Примерный план проведения урока

1. Ввести понятие уравнения поверхности в заданной прямоугольной системе координат: уравнение с тремя переменными  $x$ ,  $y$ ,  $z$  называется уравнением данной поверхности  $F$  в заданной системе координат  $Oxyz$ , если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности  $F$  и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.

2. Используя известную формулу расстояния между двумя точками с заданными координатами, вывести уравнение сферы радиуса  $R$  с центром в точке  $C(x_0; y_0; z_0)$ .

3. В классе можно решить задачи 678а, 679а, 680а, 681а.

Для работы дома — задачи 678—681 выборочно.

Сильным учащимся можно предложить задачи 745, 746.

## § 2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

### Уроки № 48—49

#### Тема уроков: Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

#### Основные задачи уроков

Ввести понятие угла между векторами и скалярного произведения векторов, рассмотреть формулу скалярного произведения в координатах и свойства скалярного произведения, сформировать умения вычислять скалярное произведение векторов и находить угол между векторами по их координатам.

#### Примерный план проведения уроков

1. В начале первого урока ввести понятие угла между векторами. Рисунки 187, 188 из учебника и слайд 7.5

помогут сформировать представления об угле между векторами и о перпендикулярности двух векторов.

### Угол между векторами

7.5

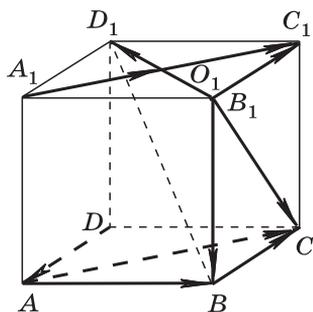
Дано: куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $AB = a$ . Точка  $O_1$  — центр грани  $A_1 B_1 C_1 D_1$ .

1. Найдите угол между векторами:

- а)  $\vec{B_1 B}$  и  $\vec{B_1 C}$ ;
- б)  $\vec{BC}$  и  $\vec{AC}$ ;
- в)  $\vec{DA}$  и  $\vec{B_1 D_1}$ .

2. Вычислите скалярное произведение векторов:

- а)  $\vec{AD}$  и  $\vec{B_1 C}$ ;
- б)  $\vec{D_1 B}$  и  $\vec{AC}$ ;
- в)  $\vec{A_1 O_1}$  и  $\vec{A_1 C_1}$ ;
- г)  $\vec{AB}$  и  $\vec{A_1 C_1}$ ;
- д)  $\vec{AC}$  и  $\vec{BA}$ .



2. Затем ввести скалярное произведение двух векторов как произведение их длин на косинус угла между ними. Используется обозначение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{a b}).$$

При введении скалярного произведения векторов важно обратить внимание учащихся на то, что скалярное произведение есть число, т. е. скаляр, поэтому это произведение называется скалярным.

3. Полезно рассмотреть пример применения скалярного произведения в физике.

Пусть под действием постоянной силы  $\vec{F}$  тело совершило механическое перемещение, которое задаётся вектором  $\vec{S}$  (рис. 7.7). Если  $(\widehat{F S}) = \alpha$ ,

то для вычисления работы  $A$ , совершённой силой  $\vec{F}$ , пользуются формулой  $A = F \cdot S \cdot \cos \alpha$ , где  $F$  и  $S$  — модули вектора силы  $\vec{F}$  и вектора перемещения  $\vec{S}$ .

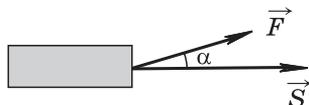


Рис. 7.7

Произведение  $F \cdot S \cdot \cos \alpha$  есть скалярное произведение векторов  $\vec{F}$  и  $\vec{S}$ , т. е. работа постоянной силы представляет собой скалярное произведение вектора силы и вектора перемещения:  $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$ .

4. В учебнике предлагается доказать самостоятельно два утверждения, которые находят применение в дальнейшем. Приведём их доказательства.

1) Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Доказательство.

Пусть  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , тогда  $\widehat{(\vec{a}\vec{b})} = 90^\circ$ ,  $\cos(\widehat{(\vec{a}\vec{b})}) = \cos 90^\circ = 0$ , и поэтому  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$ .

Обратно: пусть  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  и векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ненулевые. Тогда  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{(\vec{a}\vec{b})}) = 0$ , и так как  $|\vec{a}| \neq 0$ ,  $|\vec{b}| \neq 0$ , то  $\cos(\widehat{(\vec{a}\vec{b})}) = 0$ . Отсюда следует, что  $\widehat{(\vec{a}\vec{b})} = 90^\circ$ , т. е.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

2) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

Доказательство.

Угол между равными векторами по определению равен  $0^\circ$ , поэтому  $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ .

5. Рассмотреть формулу скалярного произведения двух векторов  $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$  через их координаты:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ .

Полезно дать словесную формулировку равенства: скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Как доказать эту формулу? На первый взгляд кажется, что проще всего поступить так. Разложим векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  по координатным векторам:

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

Перемножив почленно эти равенства, получим формулу скалярного произведения в координатах.

Однако такой подход к доказательству неприемлем, так как ещё не изучены свойства скалярного произведения векторов, в частности, не доказана возможность раскрытия скобок по правилу умножения многочленов.

Приведём доказательство формулы скалярного произведения в координатах для случая, когда векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  неколлинеарны (рис. 7.8). По теореме косинусов

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \alpha.$$

Так как  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ , то это равенство можно переписать в таком виде:

$$\begin{aligned} |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha, \text{ или} \\ |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}, \text{ откуда} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть  $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ ,  $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ , тогда вектор  $\vec{b} - \vec{a}$  имеет координаты

$$\begin{aligned} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}, \\ |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \\ |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в равенство (1), получим

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}{2} = \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \end{aligned}$$

6. Для работы на первом уроке использовать выборочно задачи 682а, б, з, 684а, г; слайд 7.5. Для работы дома — задачи 682—684; вопросы 11—14 к главе VII.

Второй урок можно посвятить повторению вопросов теории, изучению свойств скалярного произведения и решению задач.

1. В начале урока полезно провести **математический диктант**:

1) Дан квадрат  $ABCD$ . Найдите угол между векторами  $\vec{AC}$  и  $\vec{DA}$  ( $\vec{CA}$  и  $\vec{BC}$ ).

2) Найдите скалярный квадрат вектора  $7\vec{i}$  ( $6\vec{j}$ ).

3) Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 120^\circ$  ( $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 135^\circ$ ).

4)  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб, ребро которого равно 1. Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{AD}_1$  и  $\vec{BC}$  ( $\vec{BA}_1$  и  $\vec{CD}$ ).

5) Вычислите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если

$$\vec{a}\{1; 2; 3\}, \quad \vec{b}\{-1; -2; 3\}$$

$$(\vec{a}\{2; -1; 3\}, \vec{b}\{-2; 2; 3\}).$$

2. Затем выводится формула для вычисления косинуса угла между ненулевыми векторами с заданными координатами:

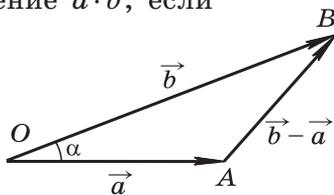


Рис. 7.8

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

3. Утверждения об основных свойствах скалярного произведения доказываются точно так же, как в планиметрии. На уроке могут быть доказаны некоторые из них.

Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и любого числа  $k$  справедливы равенства:

- 1)  $\vec{a}^2 \geq 0$ , причём  $\vec{a}^2 > 0$  при  $\vec{a} \neq \vec{0}$ .
- 2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (переместительный закон).
- 3)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$  (распределительный закон).
- 4)  $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b}$  (сочетательный закон).

Рассмотрим для примера свойство 3. Введём прямоугольную систему координат и рассмотрим произвольные векторы  $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ ,  $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ ,  $\vec{c}\{x_3; y_3; z_3\}$ . Воспользуемся формулой скалярного произведения в координатах и тем, что координаты вектора  $\vec{a} + \vec{b}$  равны суммам соответствующих координат векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (x_1 + x_2) \cdot x_3 + (y_1 + y_2) \cdot y_3 + (z_1 + z_2) \cdot z_3 = \\ &= (x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3) + (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}. \end{aligned}$$

4. Следует обратить внимание учащихся на то, что распределительный закон имеет место для любого числа слагаемых, а скалярное произведение, в котором каждый из сомножителей является суммой векторов, можно вычислять по правилу умножения многочленов. Рассмотрим, например, скалярное произведение  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d})$ . Положим  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{m}$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) &= \vec{m} \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{m} \cdot \vec{c} + \vec{m} \cdot \vec{d} = \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d}.$$

Свойства скалярного произведения используются в процессе решения задач.

5. Для работы на уроке можно использовать задачи 685, 686а, 687а, 690; слайды 7.6, 7.7.

Для работы дома — задачи 688—694 выборочно. Сильным учащимся можно предложить задачи 695, 696, 697, 702, 703.

Вычислите угол между вектором  $\vec{a}\{2; 1; 2\}$  и координатным вектором  $\vec{i}$ .

Решение.

$$\vec{a}\{2; 1; 2\}, \vec{i}\{1; 0; 0\},$$

$$\cos(\widehat{a i}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|}; \vec{a} \cdot \vec{i} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 2,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3, |\vec{i}| = 1,$$

$$\cos(\widehat{a i}) = \frac{2}{3 \cdot 1} \approx 0,6667, (\widehat{a i}) \approx 48^\circ 11'.$$

### Применение скалярного произведения к решению задач

**Задача.** Все рёбра тетраэдра  $ABCD$  равны друг другу. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AD$  и  $BC$ .

Докажите, что  $\vec{MN} \cdot \vec{AD} = 0$ .

Решение.

*Способ 1.*  $BM$  — медиана, а значит, и высота в правильном треугольнике  $ABD$ .

Поэтому  $\vec{MB} \perp \vec{AD}$ .

Аналогично  $\vec{MC} \perp \vec{AD}$ ,

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{MB} + \vec{MC}).$$

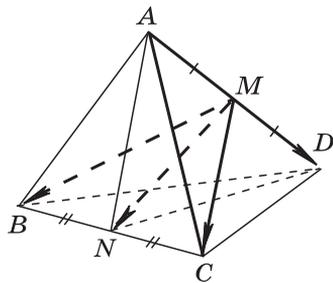
Следовательно,

$$\vec{MN} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{MB} + \vec{MC}) \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{MB} \cdot \vec{AD} + \vec{MC} \cdot \vec{AD}) =$$

$$= \frac{1}{2}(0 + 0) = 0.$$

*Способ 2.*  $AN = DN$  как высоты равных правильных треугольников, поэтому треугольник  $AND$  равнобедренный.

Следовательно, медиана  $NM$  является также высотой треугольника  $AND$ , т. е.  $\vec{MN} \perp \vec{AD}$  и  $\vec{MN} \cdot \vec{AD} = 0$ .



### Задача 684.

Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб,  $AB = a$ ,  $O_1$  — центр грани  $A_1 B_1 C_1 D_1$ . Вычислите скалярное произведение векторов: а)  $\vec{AD}$  и  $\vec{B_1 C_1}$ ; г)  $\vec{BA_1}$  и  $\vec{BC_1}$ .

Решение.

а) Так как  $\vec{AD} = \vec{B_1 C_1}$  (рис. 7.9), то

$$\vec{AD} \cdot \vec{B_1 C_1} = a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2.$$

г) *Способ 1.* Треугольник  $BA_1 C_1$  правильный. Стороны его равны как диагонали равных квадратов:

$$BA_1 = BC_1 = a\sqrt{2}, \quad (\vec{BA_1}, \vec{BC_1}) = 60^\circ,$$

поэтому  $\vec{BA_1} \cdot \vec{BC_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = a^2$ .

*Способ 2.*

$$\begin{aligned} \vec{BA_1} \cdot \vec{BC_1} &= (\vec{BA} + \vec{AA_1}) \cdot (\vec{BC} + \vec{CC_1}) = \vec{BA} \cdot \vec{BC} + \vec{BA} \cdot \vec{CC_1} + \\ &+ \vec{AA_1} \cdot \vec{BC} + \vec{AA_1} \cdot \vec{CC_1} = 0 + 0 + 0 + a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2. \end{aligned}$$

*Способ 3.* Введём прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 7.10. Тогда вектор  $\vec{BA_1}$  имеет координаты  $\{a; 0; a\}$ , а вектор  $\vec{BC_1}$  имеет координаты  $\{0; a; a\}$ . Поэтому  $\vec{BA_1} \cdot \vec{BC_1} = a \cdot 0 + 0 \cdot a + a \cdot a = a^2$ .

*Замечание.* В данной задаче мы указали три способа решения. Ряд других задач также можно решить разными способами. Желательно, чтобы школьники сами выбрали способ решения. Наиболее сильным учащимся можно предложить решить некоторые задачи несколькими способами.

**Задача 690.** Даны векторы  $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$  и  $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ . При каком значении  $m$  векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны?

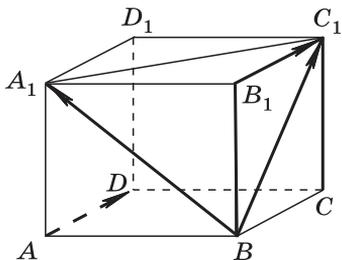


Рис. 7.9

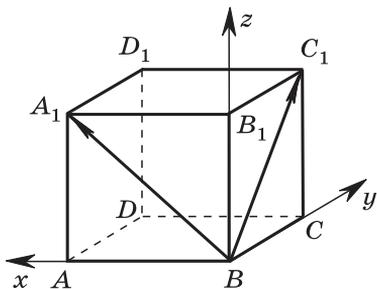


Рис. 7.10

Решение. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны, если  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , т. е.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 3m - 28 = 7m - 28 = 0$ . Отсюда  $m = 4$ .

**Задача 691.** Даны точки  $A(0; 1; 2)$ ,  $B(\sqrt{2}; 1; 2)$ ,  $C(\sqrt{2}; 2; 1)$ ,  $D(0; 2; 1)$ . Докажите, что  $ABCD$  — квадрат (рис. 7.11).

Решение.

1) Найдём координаты середины отрезка  $AC$ :  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $y = \frac{3}{2}$ ,  $z = \frac{3}{2}$ .

Такие же координаты имеет середина отрезка  $BD$ . Поэтому отрезки  $AC$  и  $BD$  пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно,  $ABCD$  — параллелограмм.

2) Найдём длины сторон  $AB$  и  $AD$ :  $AB = \sqrt{2 + 0 + 0} = \sqrt{2} = AD$ .

Значит,  $ABCD$  — ромб.

3) Так как  $\vec{AB} \{ \sqrt{2}; 0; 0 \}$ ,  $\vec{AD} \{ 0; 1; -1 \}$ , то  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ , т. е.  $\vec{AB} \perp \vec{AD}$ . Итак,  $ABCD$  — ромб, у которого угол прямой, следовательно,  $ABCD$  — квадрат.

Замечание. Можно дать другое решение задачи (см. указание в учебнике).

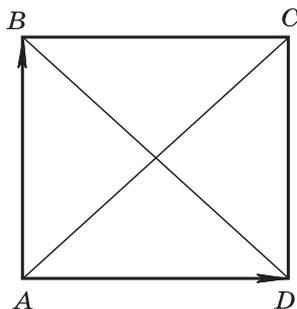


Рис. 7.11

## Уроки № 50—51

### Тема уроков: Вычисление углов между прямыми и плоскостями

#### Основные задачи уроков

Показать, как используется скалярное произведение векторов при решении задач на вычисление углов между двумя прямыми, а также между прямой и плоскостью.

#### Примерный план проведения уроков

1. В учебнике рассматриваются две типовые задачи (задачи 1 и 2), но предварительно нужно ввести понятие направляющего вектора прямой. Ненулевой вектор называется направляющим вектором прямой  $a$ , если он лежит либо на прямой  $a$ , либо на прямой, параллельной  $a$ .

2. Рассмотреть задачи 1 и 2, а также выборочно задачи 705—708. Целесообразно использовать слайд 7.8.

3. Для работы дома — задачи 705—709 выборочно.

Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $DA=1$ ,  $DC=2$ ,  $DD_1=3$ .

Найдите угол между прямыми  $CB_1$  и  $D_1B$ .

Решение.

Введём систему координат  $Dxyz$ . Рассмотрим направляющие векторы  $\vec{D_1B}$  и  $\vec{CB_1}$  прямых  $D_1B$  и  $CB_1$ .

$$\vec{D_1}(0; 0; 3), \vec{B}(1; 2; 0),$$

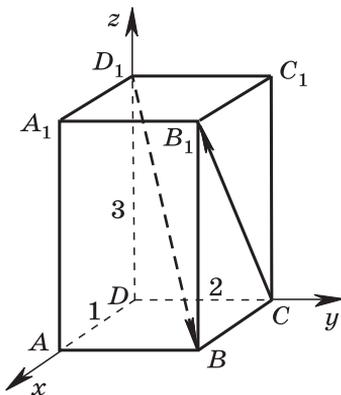
$$\vec{D_1B}\{1; 2; -3\}, \vec{C}(0; 2; 0),$$

$$\vec{B_1}(1; 2; 3), \vec{CB_1}\{1; 0; 3\}.$$

Пусть  $\varphi$  — искомый угол,

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{1+0+9}},$$

$$\cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{35}}, \quad \varphi \approx 47^\circ 28'.$$



**Задача 705 а).** Вычислите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $A(3; -2; 4)$ ,  $B(4; -1; 2)$ ,  $C(6; -3; 2)$ ,  $D(7; -3; 1)$ .

Решение. Найдём координаты векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$ :

$$\vec{AB}\{1; 1; -2\}, \vec{CD}\{1; 0; -1\}.$$

Для нахождения угла  $\varphi$  между прямыми  $AB$  и  $CD$  воспользуемся формулой

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где  $\{x_1; y_1; z_1\}$  — координаты вектора  $\vec{AB}$ ,  $\{x_2; y_2; z_2\}$  — координаты вектора  $\vec{CD}$ .

По этой формуле получаем

$$\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{поэтому } \varphi = 30^\circ.$$

**Задача 707 а).** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точка  $M$  лежит на ребре  $AA_1$ , причём  $AM:MA_1=3:1$ , а точка  $N$  — середина ребра  $BC$ . Вычислите косинус угла между прямыми  $MN$  и  $DD_1$ .

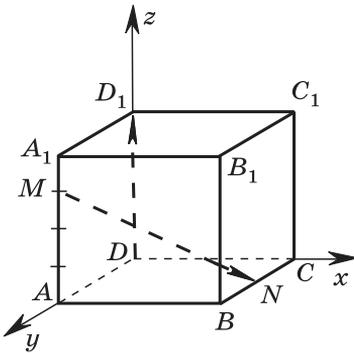


Рис. 7.12

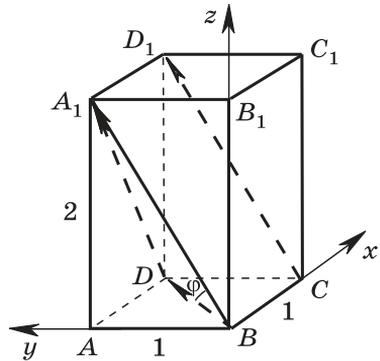


Рис. 7.13

Решение.

1) Введём систему координат так, как показано на рисунке 7.12. Рассмотрим направляющие векторы  $\overrightarrow{DD_1}$  и  $\overrightarrow{MN}$  прямых  $DD_1$  и  $MN$ . Пусть единица измерения отрезков выбрана так, что  $AA_1=4$ , тогда  $M(0; 4; 3)$ ,  $N(4; 2; 0)$ ,  $\overrightarrow{MN}\{4; -2; -3\}$ ,  $\overrightarrow{DD_1}\{0; 0; 4\}$ .

2) Используя векторы  $\overrightarrow{MN}$  и  $\overrightarrow{DD_1}$ , находим косинус угла  $\varphi$  между прямыми  $DD_1$  и  $MN$ :  $\cos \varphi = \frac{|4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 4|}{\sqrt{16+4+9} \cdot \sqrt{16}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$ .

**Задача 708 а).** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $AB=BC=\frac{1}{2}AA_1$ . Найдите угол между прямыми  $BD$  и  $CD_1$ .

Решение. *Способ 1.* Введём систему координат, как показано на рисунке 7.13. Пусть единица измерения отрезков выбрана так, что  $AA_1=2$ , тогда  $AB=BC=1$ ,  $B(0; 0; 0)$ ,  $D(1; 1; 0)$ ,  $C(1; 0; 0)$ ,  $D_1(1; 1; 2)$ ,  $\overrightarrow{BD}\{1; 1; 0\}$ ,  $\overrightarrow{CD_1}\{0; 1; 2\}$ .

Используя векторы  $\overrightarrow{BD}$  и  $\overrightarrow{CD_1}$ , находим косинус угла  $\varphi$  между прямыми  $BD$  и  $CD_1$ :  $\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2|}{\sqrt{1+1+0} \cdot \sqrt{0+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ .  
Отсюда  $\varphi \approx 71^\circ 34'$ .

*Способ 2* (не векторный). Угол между прямыми  $BD$  и  $CD_1$  равен углу между прямыми  $BD$  и  $BA_1$ . В треугольнике  $BDA_1$  имеем  $BA_1=\sqrt{5}$ ,  $A_1D=\sqrt{5}$ ,  $BD=\sqrt{2}$ . По теореме косинусов  $A_1D^2=A_1B^2+BD^2-2A_1B \cdot BD \cdot \cos \varphi$ . Отсюда находим  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ .

4. В конце второго урока провести самостоятельную работу.

### Самостоятельная работа № 7.3

#### Вариант 1

1. Даны векторы  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{k}$ . Вычислите  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

2. Вычислите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $A(\sqrt{3}; 1; 0)$ ,  $B(0; 0; 2\sqrt{2})$ ,  $C(0; 2; 0)$ ,  $D(\sqrt{3}; 1; 2\sqrt{2})$ .

#### Вариант 2

1. Даны векторы  $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$  и  $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$ . Вычислите  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

2. Вычислите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $A(6; -4; 8)$ ,  $B(8; -2; 4)$ ,  $C(12; -6; 4)$ ,  $D(14; -6; 2)$ .

#### Ответы:

Вариант 1. 1. 6. 2.  $60^\circ$ .

Вариант 2. 1. 2. 2.  $30^\circ$ .

**Задача 712.** Докажите, что угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых содержит диагональ куба, а другая — диагональ грани куба, равен  $90^\circ$ .

Решение.

Способ 1.

Пусть  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб с ребром 1. Введём векторы  $\vec{a} = \vec{BC}$ ,  $\vec{b} = \vec{BA}$ ,  $\vec{c} = \vec{BB}_1$  (рис. 7.14). Тогда

$$\begin{aligned} \vec{BD}_1 &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{CB}_1 = \vec{c} - \vec{a}, \quad \vec{BD}_1 \cdot \vec{CB}_1 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 - \vec{a}^2 - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 + 0 + 1 - 1 - 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $BD_1 \perp CB_1$ .

Способ 2.

Введём систему координат, как показано на рисунке 7.14. Тогда  $B(0; 0; 0)$ ,  $C(1; 0; 0)$ ,  $B_1(0; 0; 1)$ ,  $D_1(1; 1; 1)$ ,  $\vec{CB}_1 \{ -1; 0; 1 \}$ ,  $\vec{BD}_1 \{ 1; 1; 1 \}$ . Следовательно,

$$\cos(\widehat{CB_1 BD_1}) = \frac{|-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{|\vec{CB}_1| \cdot |\vec{BD}_1|} = 0,$$

и, значит,  $CB_1 \perp BD_1$ .

**Задача 714.** Лучи  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  образуют три прямых угла  $AOB$ ,  $AOC$  и  $BOC$ . Найдите угол между биссектрисами углов  $COA$  и  $AOB$ .

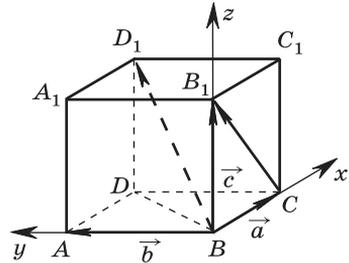


Рис. 7.14

Решение.

1) Пусть  $OM$  — биссектриса угла  $AOC$ ,  $OK$  — биссектриса угла  $AOB$ ,  $\angle MOK = \varphi$ . Введём единичные векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  так, как показано на рисунке 7.15, и рассмотрим векторы  $\vec{m} = \vec{a} + \vec{c}$  и  $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b}$ . Очевидно, что  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  — векторы, сонаправленные с лучами  $OM$  и  $OK$ .

2) Найдём скалярное произведение векторов  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  и их длины:

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = (\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} = 1, \quad |\vec{m}| = |\vec{n}| = \sqrt{2}.$$

Отсюда следует, что  $\cos \varphi = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2}$ ,  $\varphi = 60^\circ$ .

**Задача 716.** В тетраэдре  $DABC$   $DA = 5$  см,  $AB = 4$  см,  $AC = 3$  см,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $\angle DAB = 60^\circ$ ,  $\angle DAC = 45^\circ$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до точки пересечения медиан треугольника  $DBC$ .

Решение.

1) Пусть  $K$  — точка пересечения медиан треугольника  $DBC$  (рис. 7.16). Известно, что  $\vec{AK} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$  (см. задачу 603).

2) Введём векторы  $\vec{a} = \vec{AB}$ ,  $\vec{b} = \vec{AC}$ ,  $\vec{c} = \vec{AD}$ . Тогда  $\vec{AK} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ . Вычислим скалярный квадрат вектора  $\vec{AK}$ :

$$|\vec{AK}|^2 = \frac{1}{9}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \frac{1}{9}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

3) Используя данные задачи, находим:  $\vec{a}^2 = 16$ ,  $\vec{b}^2 = 9$ ,  $\vec{c}^2 = 25$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 \cdot \cos 90^\circ = 0$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 10$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ . Следовательно,  $|\vec{AK}|^2 = \frac{1}{9}(70 + 15\sqrt{2})$ ,

$$AK = \frac{1}{3}\sqrt{70 + 15\sqrt{2}}.$$

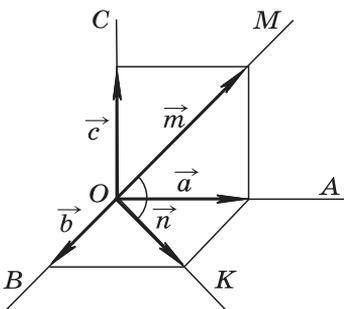


Рис. 7.15

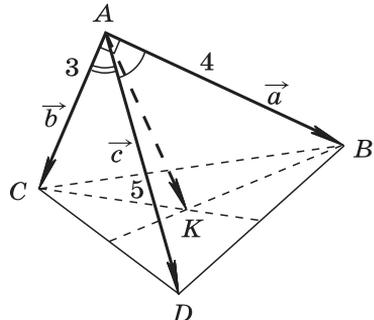


Рис. 7.16

## Урок № 52

### Тема урока: Уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

#### Основные задачи урока

Вывести уравнение плоскости и формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости; показать, как они применяются при решении задач.

#### Примерный план проведения урока

1. Напомнить понятие уравнения поверхности в заданной прямоугольной системе координат: уравнение с тремя переменными  $x$ ,  $y$ ,  $z$  называется уравнением данной поверхности  $F$  в системе координат  $Oxyz$ , если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности  $F$  и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.

2. Используя формулу скалярного произведения векторов в координатах, вывести уравнение плоскости  $\alpha$ , проходящей через данную точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  и перпендикулярной к данному ненулевому вектору  $\vec{n} \{a; b; c\}$ :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

Отметить, что если обозначить число  $-(ax_0 + by_0 + cz_0)$  буквой  $d$ , то уравнение плоскости  $\alpha$  примет вид

$$ax + by + cz + d = 0. \quad (2)$$

Подчеркнуть, что уравнение плоскости в прямоугольной системе координат является уравнением первой степени относительно переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

3. Разобрать с учащимися решение задачи 3 из п. 79, в которой получена формула для расстояния  $l$  от точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости, заданной уравнением (2):

$$l = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (3)$$

Можно отметить, что если точка  $M_0$  лежит в плоскости, то её координаты удовлетворяют уравнению (2), т. е.  $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ , поэтому числитель в правой части равенства (3) равен нулю и расстояние от точки  $M_0$  до плоскости равно нулю.

4. Далее можно рассмотреть следующие задачи на применение уравнения плоскости и формулы (3):

**Задача 1.** Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(1; 0; -1)$  и перпендикулярной к вектору  $\vec{n} \{3; -7; 2\}$ .

Решение.

$$3(x-1) - 7(y-0) + 2(z+1) = 0, \text{ или } 3x - 7y + 2z - 1 = 0.$$

*Задача 2.* В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $AB=4$ ,  $AD=3$ ,  $AA_1=2$ . На ребре  $A_1 D_1$  взята точка  $K$ , такая, что  $A_1 K : K D_1 = 2 : 1$ . Через точку  $K$  проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная к прямой  $AC_1$  и пересекающая прямую  $BC$  в точке  $M$ . Найдите расстояние: а) от точки  $B_1$  до плоскости  $\alpha$ ; б) от точки  $M$  до точки  $D_1$ .

Решение. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке  $A$ , как показано на рисунке 7.17. Тогда точки  $A$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  имеют следующие координаты:  $A(0; 0; 0)$ ,  $B_1(4; 0; 2)$ ,  $C_1(4; 3; 2)$ ,  $D_1(0; 3; 2)$ .

По условию задачи  $A_1 K : K D_1 = 2 : 1$ , поэтому точка  $K$  имеет координаты  $(0; 2; 2)$ , а координаты вектора  $\overrightarrow{AC_1}$  равны разностям соответствующих координат точек  $C_1$  и  $A$ , т. е.  $\overrightarrow{AC_1}\{4; 3; 2\}$ . Используя уравнение (1), напишем уравнение плоскости  $\alpha$ , проходящей через точку  $K(0; 2; 2)$  и перпендикулярной к вектору  $\overrightarrow{AC_1}\{4; 3; 2\}$ :

$$4x + 3(y-2) + 2(z-2) = 0, \text{ или } 4x + 3y + 2z - 10 = 0.$$

а) Искомое расстояние  $l$  от точки  $B_1(4; 0; 2)$  до плоскости  $\alpha$  находим по формуле (3):

$$l = \frac{|4 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{29}}.$$

б) Произвольная точка на прямой  $BC$  имеет координаты  $(4; y; 0)$ , где  $y$  может принимать любое значение. Чтобы найти ординату  $y$  точки  $M(4; y; 0)$ , в которой плоскость  $\alpha$  пересекается с прямой  $BC$ , нужно положить в

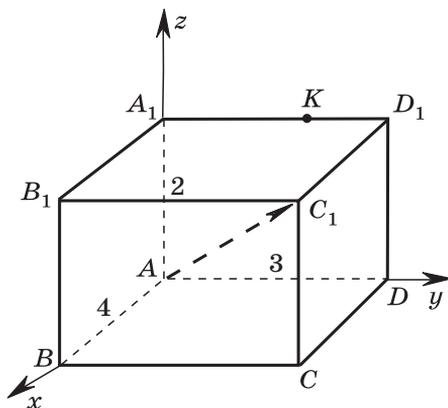


Рис. 7.17

уравнении плоскости  $x=4, z=0$ . Тогда получим  $16+3y-10=0$ , откуда находим  $y=-2$ . Итак, точка  $M$  имеет координаты  $(4; -2; 0)$ , а координаты точки  $D_1$  равны  $(0; 3; 2)$ . По формуле расстояния между двумя точками через их координаты находим  $MD_1$ :

$$MD_1 = \sqrt{(0-4)^2 + (3+2)^2 + (2-0)^2} = 3\sqrt{5}.$$

Можно предложить учащимся *дополнительные задания* в этой задаче, например: написать уравнение плоскости  $\beta$ , проходящей через середину ребра  $AB$  и параллельной плоскости  $\alpha$ ; найти расстояние от середины диагонали  $A_1C$  до плоскости  $\beta$ ; и т. д.

**Задача 3.** На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  взята точка  $P$  так, что  $AP=3 \cdot PA_1$ .

а) Составьте уравнение плоскости  $\alpha$ , проходящей через точки  $P, B$  и  $D_1$ , если  $AB=AA_1=4, AD=3$ ;

б) найдите угол между диагональю  $AC_1$  и плоскостью  $\alpha$ ;

в) найдите расстояние от середины диагонали  $AC_1$  до плоскости  $\alpha$ ;

г) найдите расстояние от точки  $D$  до плоскости  $\alpha$ .

Указания к решению (рис. 7.18).

а)  $P(4; 0; 3), B(0; 0; 0), D_1(4; 3; 4)$ .

$$\begin{cases} a \cdot 4 + b \cdot 0 + c \cdot 3 + d = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 4 + b \cdot 3 + c \cdot 4 + d = 0, \end{cases}$$

откуда  $d=0, a=-\frac{3}{4}c, b=-\frac{c}{3}$ . Возьмём  $c=-12$ . Тогда уравнение плоскости  $ax+by+cz+d=0$  принимает вид  $9x+4y-12z=0$ .

б)  $\overrightarrow{AC_1} \{-4; 3; 4\}$ . Пусть  $\theta = \widehat{(\vec{n}, \overrightarrow{AC_1})}, \overrightarrow{AC_1} = \vec{p}$  (рис. 7.19),

$$|\vec{n}| = \sqrt{241}, |\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{41}, \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} = -72.$$

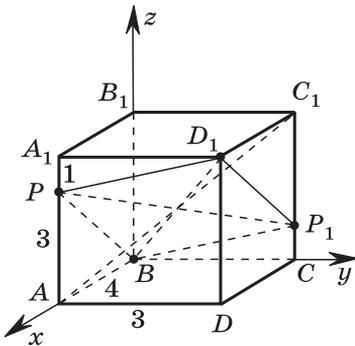


Рис. 7.18

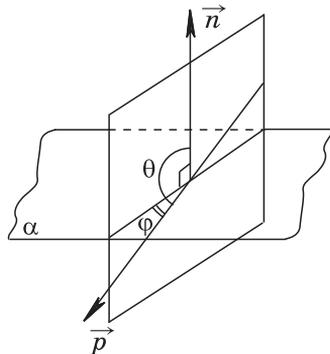


Рис. 7.19

$$\cos \theta = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{-72}{\sqrt{9881}},$$

$\theta$  — тупой угол.  
 $\cos \theta = \cos(90^\circ + \varphi) = -\sin \varphi,$

$$\sin \varphi = \frac{72}{\sqrt{9881}}, \quad \varphi \approx 46^\circ 25'.$$

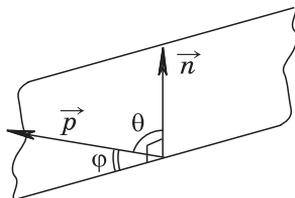


Рис. 7.20

**Замечание.** Если  $\cos \theta > 0$ , то  $\theta$  — острый угол,  $\theta = 90^\circ - \varphi$ ,  $\cos \theta = \sin \varphi$  (рис. 7.20).

в) Координаты середины отрезка  $AC_1$  равны  $(2; 1,5; 2)$ , а её расстояние от плоскости  $\alpha$  равно нулю.

Прокомментируйте результат, используя рисунок 7.18.

г)  $D(4; 3; 0)$ ,  $l = \frac{48}{\sqrt{241}} \approx 3,092$ .

**5. Дополнительные задания**, аналогичные дополнительным заданиям к задаче 2, можно предложить в задачах к § 3 учебника и дополнительных задачах к главе VII.

В задаче 694: а) найдите какой-нибудь вектор, перпендикулярный к плоскости  $ABC$ ; б) напишите уравнение плоскости  $ABC$ ; в) найдите расстояние до плоскости  $ABC$  от начала координат и от точки  $D(1; -1; 2)$ .

В задаче 695: а) напишите уравнение плоскости  $ABC$ ; б) найдите расстояния до плоскости  $ABC$  от точки  $D(1; 2; 3)$  и от точки  $E(1; 1; 1)$ .

В задаче 707 найдите расстояния: а) от вершин  $B$  и  $D_1$  до плоскости  $MNC_1$ ; б) от вершин  $A$  и  $C_1$  до плоскости  $MNB_1$ .

В задаче 708 найдите расстояния от вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  до плоскости  $A_1MN$ , где  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $BC$  и  $C_1D_1$ .

В задаче 756 найдите расстояния: а) от вершины  $A$  до плоскости  $MND_1$ ; б) от точки  $N$  до плоскости  $MC_1D_1$ .

### § 3. ДВИЖЕНИЯ

#### Уроки № 53—54

**Тема уроков: Центральная симметрия.  
 Осевая симметрия. Зеркальная симметрия.  
 Параллельный перенос**

#### Основные задачи уроков

Познакомить учащихся с понятием движения пространства и основными видами движений.

## Примерный план проведения уроков

1. Сначала ввести понятие отображения пространства на себя: если каждой точке  $M$  пространства поставлена в соответствие некоторая точка  $M_1$ , причём любая точка  $M_1$  пространства оказалась поставленной в соответствие какой-то точке  $M$ , то говорят, что задано отображение пространства на себя.

2. Отметить, что особую роль в геометрии играют отображения пространства на себя, сохраняющие расстояния между точками. Они называются движениями пространства.

Таким образом, если при движении пространства точки  $A$  и  $B$  переходят (отображаются) в точки  $A_1$  и  $B_1$ , то  $AB = A_1B_1$ .

3. В учебнике рассмотрены четыре вида движений. Доказано, что центральная симметрия, осевая симметрия, зеркальная симметрия и параллельный перенос являются движениями.

Доказательства этих утверждений достаточно прозрачны, они могут быть рассмотрены на одном уроке.

В случае центральной, осевой и зеркальной симметрий используется метод координат. Сначала устанавливается связь между координатами двух симметричных точек  $M(x; y; z)$  и  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ .

Например, если рассматривается центральная симметрия относительно начала координат, то  $x_1 = -x$ ,  $y_1 = -y$ ,  $z_1 = -z$ . Далее для любых двух точек  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$  и симметричных им точек  $A_1$  и  $B_1$  доказываются, что  $AB = A_1B_1$ , т. е. сохраняется расстояние между точками.

Доказательство утверждения о том, что параллельный перенос является движением, проводится без помощи координат, но с помощью векторов.

4. На первом уроке следует рассмотреть теоретический материал и решить задачи 719, 720, 724. Для домашней работы можно использовать задачи 721—723.

На втором уроке провести повторение вопросов теории, используя вопросы 15—17 к главе VII, слайды 7.9, 7.10, и рассмотреть выборочно задачи 725—730.

**Задача 720 а).** Докажите, что при центральной симметрии прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую.

Решение.

1) Рассмотрим центральную симметрию пространства с центром  $O$  и произвольную прямую  $AB$ , не проходящую через точку  $O$  (рис. 7.21). Прямая  $AB$  и точка  $O$  определяют единственную плоскость  $\alpha$ . Точки  $A$  и  $B$  перехо-

дят при данной симметрии в точки  $A_1$  и  $B_1$ , также лежащие в плоскости  $\alpha$ . Поэтому и вся прямая  $A_1B_1$  лежит в плоскости  $\alpha$ .

2) Докажем сначала, что прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  параллельны. Треугольники  $OAB$  и  $OA_1B_1$  равны по двум сторонам ( $OA = OA_1$ ,  $OB = OB_1$ ) и углу между ними ( $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ ). Из равенства треугольников следует, что  $\angle ABO = \angle A_1B_1O$ , т. е. равны накрест лежащие углы при пересечении прямых  $AB$  и  $A_1B_1$  секущей  $BB_1$ . Следовательно,  $AB \parallel A_1B_1$ .

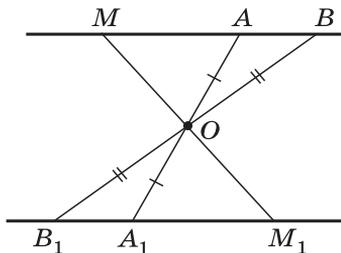


Рис. 7.21

3) Докажем теперь, что при центральной симметрии с центром  $O$  прямая  $AB$  отображается на прямую  $A_1B_1$ . Для этого нужно доказать, что произвольная точка  $M$  прямой  $AB$  переходит в некоторую точку  $M_1$  прямой  $A_1B_1$  (иначе говоря, на прямой  $A_1B_1$  имеется точка  $M_1$ , симметричная точке  $M$  относительно  $O$ ), и обратно: произвольная точка прямой  $A_1B_1$  симметрична относительно  $O$  некоторой точке прямой  $AB$ .

Возьмём на прямой  $AB$  произвольную точку  $M$  (отличную от точки  $A$ ) и проведём прямую  $MO$ . Она пересекает прямую  $A_1B_1$  в какой-то точке  $M_1$  (см. рис. 7.21). Треугольники  $MAO$  и  $M_1A_1O$  равны по стороне ( $AO = A_1O$ ) и прилежащим к ней углам (углы  $MOA$  и  $M_1OA_1$  равны как вертикальные, углы  $MAO$  и  $M_1A_1O$  равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых  $AB$  и  $A_1B_1$  секущей  $AA_1$ ). Поэтому  $MO = OM_1$ , а это и означает, что точка  $M$  переходит при симметрии относительно  $O$  в точку  $M_1$ , лежащую на прямой  $A_1B_1$ . Аналогично доказывается обратное: любая точка  $M_1$  прямой  $A_1B_1$  симметрична некоторой точке  $M$  прямой  $AB$  относительно  $O$ .

Итак, при симметрии с центром  $O$  прямая  $AB$ , не проходящая через точку  $O$ , отображается на параллельную прямую  $A_1B_1$ .

**Замечание.** Как видим, приведённое доказательство является непростым. Можно дать более простое доказательство, если вначале решить задачу 727, т. е. доказать, что при движении прямая отображается на прямую. Тогда из того факта, что точки  $A$  и  $B$  переходят при центральной симметрии в точки  $A_1$  и  $B_1$ , сразу же следует, что прямая  $AB$  переходит в прямую  $A_1B_1$ , и поэтому остаётся доказать только параллельность этих прямых.

**Задача 721 а).** Докажите, что при центральной симметрии плоскость, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей плоскость.

Решение.

1) Рассмотрим центральную симметрию пространства с центром  $O$  и произвольную плоскость  $\alpha$ , не проходящую через точку  $O$  (рис. 7.22). Пусть прямые  $a$  и  $b$ , пересекающиеся в точке  $A$ , лежат в плоскости  $\alpha$ .

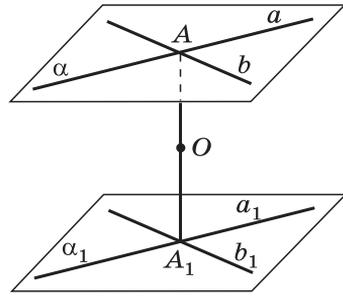


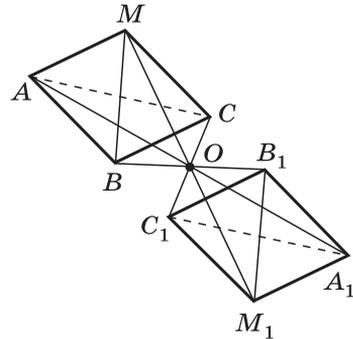
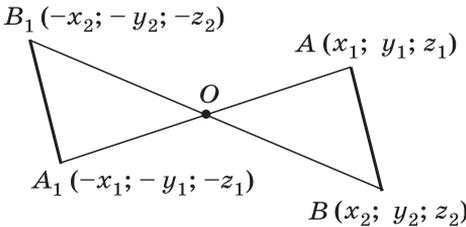
Рис. 7.22

При симметрии с центром  $O$  прямые  $a$  и  $b$  переходят соответственно в параллельные прямые  $a_1$  и  $b_1$  (задача 720 а). При этом точка  $A$  переходит в некоторую точку  $A_1$ , лежащую как на прямой  $a_1$ , так и на прямой  $b_1$ , а значит, прямые  $a_1$  и  $b_1$  пересекаются. Пересекающиеся прямые  $a_1$  и  $b_1$  определяют единственную плоскость  $\alpha_1$ . По признаку параллельности плоскостей  $\alpha \parallel \alpha_1$ .

2) Далее нетрудно доказать, что при центральной симметрии с центром  $O$  плоскость  $\alpha$  отображается на

**Центральная симметрия**

**7.9**

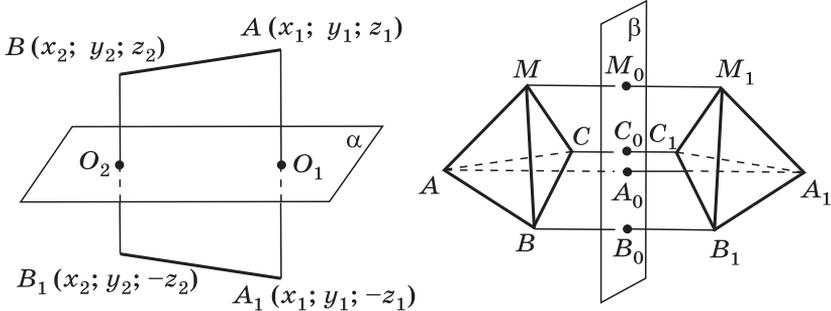


$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}, \quad AB = A_1B_1.$$

1. Докажите, что центральная симметрия есть движение.

2. Дан тетраэдр  $MABC$ . Постройте фигуру, центральнo-симметричную этому тетраэдру относительно точки  $O$ .



Плоскость  $\alpha$  совпадает с плоскостью  $Oxy$ . Точки  $O_1$  и  $O_2$  — середины отрезков  $AA_1$  и  $BB_1$ .

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2},$$

$$AB = A_1B_1.$$

1. Докажите, что зеркальная симметрия есть движение.
2. Дан тетраэдр  $MABC$ . Постройте фигуру, зеркально-симметричную этому тетраэдру относительно плоскости  $\beta$ .

плоскость  $\alpha_1$ . Это можно сделать разными способами: 1) аналогично тому, как при решении задачи 720а было доказано, что прямая  $AB$  отображается на прямую  $A_1B_1$ ; 2) можно решить сначала задачу 727б, из утверждения которой следует, что плоскость  $\alpha$  отображается на плоскость  $\alpha_1$ .

**Задача 724 а).** При зеркальной симметрии относительно плоскости  $\alpha$  плоскость  $\beta$  отображается на плоскость  $\beta_1$ . Докажите, что если  $\beta \parallel \alpha$ , то  $\beta_1 \parallel \alpha$ .

**Решение.** Доказательство проведём методом от противного. Предположим, что  $\beta \parallel \alpha$ , но плоскости  $\beta_1$  и  $\alpha$  пересекаются. Тогда они имеют общую точку  $M$ . Так как  $M \in \alpha$ , то при данной зеркальной симметрии точка  $M$  отображается в себя. Отсюда следует, что точка  $M$ , которая принадлежит плоскости  $\beta_1$ , лежит также в плоскости  $\beta$ . Но тогда плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются. Полученное противоречие показывает, что наше предположение было неверным, следовательно,  $\beta_1 \parallel \alpha$ .

## Урок № 55

### Контрольная работа № 7.1

#### Вариант 1

1. Вычислите скалярное произведение векторов  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , если  $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ ,  $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\widehat{\vec{a} \vec{b}}) = 60^\circ$ ,  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$ .

2. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между прямыми  $AD_1$  и  $BM$ , где  $M$  — середина ребра  $DD_1$ .

3. Задача 761а.

#### Вариант 2

1. Вычислите скалярное произведение векторов  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , если  $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ ,  $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\widehat{\vec{a} \vec{b}}) = 60^\circ$ ,  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$ .

2. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между прямыми  $AC$  и  $DC_1$ .

3. Задача 761б.

#### Ответы:

Вариант 1. 1.  $-1$ . 2.  $45^\circ$ .

Вариант 2. 1.  $11$ . 2.  $60^\circ$ .

## Урок № 56

### Зачёт № 7. Метод координат в пространстве

#### Карточка 1

1. Расскажите, как задаётся прямоугольная система координат в пространстве и как определяются координаты вектора.

2. Выведите формулы, выражающие координаты точки пересечения медиан треугольника через координаты его вершин.

3. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , точка  $M$  — центр грани  $AA_1 D_1 D$ . Вычислите угол между векторами  $\vec{BM}$  и  $\vec{B_1 C}$ .

#### Карточка 2

1. Расскажите о связи между координатами векторов и координатами точек.

2. Выведите формулы, выражающие координаты середины отрезка через координаты его концов.

3. Вычислите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(3; -1; 0)$ ,  $C(4; -1; 2)$ ,  $D(0; 1; 0)$ .

### Карточка 3

1. Сформулируйте определение скалярного произведения двух векторов. Сформулируйте условие перпендикулярности двух ненулевых векторов, используя скалярное произведение.

2. Выведите формулу для вычисления длины вектора по его координатам.

3. Даны точки  $A(0; 4; 0)$ ,  $B(2; 0; 0)$ ,  $C(4; 0; 4)$ ,  $D(2; 4; 4)$ . Докажите, что  $ABCD$  — ромб.

### Карточка 4

1. Сформулируйте основные свойства скалярного произведения векторов. Докажите некоторые из утверждений об этих свойствах.

2. Выведите уравнение сферы данного радиуса с центром в данной точке.

3. Даны координаты трёх вершин параллелограмма  $ABCD$ :  $A(-6; -4; 0)$ ,  $B(6; -6; 2)$ ,  $C(10; 0; 4)$ . Найдите координаты точки  $D$  и угол между векторами  $\vec{AC}$  и  $\vec{BD}$ .

### Карточка 5

1. Докажите, что центральная и осевая симметрии являются движениями.

2. Выведите формулу косинуса угла между ненулевыми векторами с заданными координатами.

3. Даны векторы  $\vec{a}\{1; 2; -1\}$ ,  $\vec{b}\{-3; 1; 4\}$ ,  $\vec{c}\{3; 4; -2\}$  и  $\vec{d}\{2; -1; 3\}$ . Вычислите скалярное произведение векторов  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{d})$ .

### Карточка 6

1. Докажите, что зеркальная симметрия и параллельный перенос являются движениями.

2. Расскажите, как вычислить угол между двумя прямыми в пространстве с помощью направляющих векторов этих прямых.

3. Даны координаты вершин тетраэдра  $MABC$ :  $M(2; 5; 7)$ ,  $A(1; -3; 2)$ ,  $B(2; 3; 7)$ ,  $C(3; 6; 0)$ . Найдите расстояние от точки  $M$  до точки  $O$  пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

## Дополнительные вопросы к зачёту

1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через данную точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  и перпендикулярной к данному ненулевому вектору  $\vec{n}\{a; b; c\}$ .

2. Напишите формулу расстояния от точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости  $ax + by + cz + d = 0$ . Приведите пример вычисления расстояния по этой формуле.

3. Расскажите о преобразовании подобия.

Приведём **некоторые рекомендации по использованию слайдов**, предназначенных для организации устной фронтальной работы учащихся с готовыми чертежами. Например, используя слайд 7.1, учащиеся сначала объясняют построение точки  $A$  по данным её координатам. Затем, отвечая на вопросы учителя, они определяют координаты точек  $B, C, D, K$ .

В слайде 7.2 представлены в координатной форме действия над векторами. Это фактически справочная таблица, которая суммирует результаты урока по теме «Координаты вектора». Здесь же дан вывод формул координат разности двух векторов.

С помощью слайда 7.5 сначала формируется понятие угла между векторами (I группа вопросов), а затем рассматриваются задачи на вычисление скалярного произведения векторов (II группа вопросов).

Слайды 7.3, 7.6, 7.7, 7.8 содержат решения задач по отдельным вопросам темы. Они могут быть использованы при проверке домашних заданий. Эти же слайды оказываются полезными на уроке при обсуждении способов решения задач, при организации самостоятельной работы учащихся и проверке её результатов. Например, слайд 7.3 можно использовать так: сначала проецируется на экран лишь его верхняя часть, содержащая условие задачи, а нижняя часть (с решением) закрывается плотной бумагой. После обсуждения задачи следует продемонстрировать её решение на экране, удалив бумагу с нижней части слайда.

Слайды 7.9, 7.10 содержат теоретический материал справочного характера. По ним можно повторить теорию, провести опрос учащихся.

Размер слайдов  $18 \times 13$  см позволяет использовать их для экранов средних размеров. По материалам, предложенным в приведённых слайдах, могут быть изготовлены настенные таблицы.

## **МАТЕРИАЛЫ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ПОВТОРЕНИЯ И ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ**

На заключительное повторение курса геометрии отводится 12 ч. Повторение следует организовать по темам, обращая особое внимание на задачи такого типа, какие предлагаются на Едином государственном экзамене. На уроках повторения целесообразно провести самостоятельные работы контролирующего характера.

Для уроков заключительного повторения предназначены приведённые ниже слайды 8.1—8.14. Они отражают основные теоретические вопросы курса стереометрии 10—11 классов.

Слайды ориентируют учителей на обсуждение с учащимися различных способов решения одной и той же задачи, на выбор рациональных способов.

Слайды 8.1—8.9 позволяют повторить многие вопросы из первых разделов курса стереометрии: параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве, свойства многогранников.

Одновременно учащиеся повторяют и ряд вопросов по планиметрии: формулы для вычисления периметров и площадей треугольника, параллелограмма, ромба, трапеции и др.

Слайды дают возможность экономно использовать время урока, увеличивать число рассмотренных вопросов теории и решенных задач.

Наличие заданий различной трудности позволяет вести дифференцированную работу с учащимися при рассмотрении каждого слайда.

Все слайды содержат несколько заданий, которые представляют собой последовательность частных вопросов в процессе решения некоторой более общей задачи. Например, в слайде 8.6 на построение сечения правильной четырёхугольной пирамиды необходимо последовательно разобрать следующие вопросы: доказать, что сече-

ние пирамиды указанной плоскостью есть трапеция, что эта трапеция равнобедренная, вычислить высоту трапеции и её верхнее основание, затем вычислить площадь трапеции.

Решение ряда задач должно завершаться заключением учителя об общих подходах к решению аналогичных задач.

На слайдах 8.10—8.13 представлены задачи на комбинацию тел, на слайде 8.14 — задача о вычислении угла между векторами.

На уроках заключительного повторения необходима целенаправленная работа по систематизации и углублению знаний учащихся по геометрии. Полезно рассмотреть некоторые геометрические задачи на экстремумы, решаемые введением вспомогательного угла. Одна из таких задач представлена на слайде 8.9, другие задачи такого рода приведены ниже.

**Задача 1.** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $A_1 C = 2\sqrt{2}$ . Какова должна быть длина ребра  $BC$ , чтобы площадь четырёхугольника  $B C D_1 A_1$  была наибольшей?

**Решение.** Пусть  $\angle BOC = \alpha$  (рис. 8.1),  $S_{B C D_1 A_1} = S(\alpha)$ . Тогда  $S(\alpha) = \frac{1}{2} B D_1 \cdot C A_1 \cdot \sin \alpha = 4 \sin \alpha$ .

Заметим, что  $0 < \alpha < \pi$  и  $S(\alpha)$  имеет наибольшее значение, когда  $\sin \alpha = 1$ , т. е. когда  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . При этом  $\angle B A_1 C = \frac{\pi}{4}$  и  $BC = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 2$ .

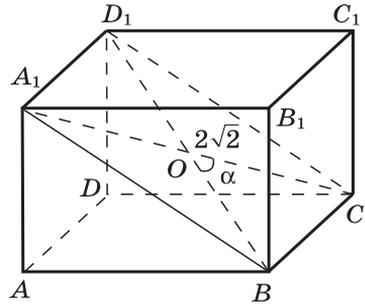


Рис. 8.1

**Задача 2.** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $AC = 2\sqrt{2}$ ,  $AA_1 = 1$ . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, имеющего наибольший объём.

**Решение.** Пусть  $\angle CAB = \alpha$  (рис. 8.2). Тогда  $BC = 2\sqrt{2} \sin \alpha$ ,  $AB = 2\sqrt{2} \cos \alpha$ ,  $V(\alpha) = 2\sqrt{2} \sin \alpha \cdot 2\sqrt{2} \cos \alpha \cdot 1 = 4 \sin 2\alpha$ .

Заметим, что  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , поэтому  $0 < 2\alpha < \pi$  и  $V(\alpha)$  имеет наибольшее значение, если  $\sin 2\alpha = 1$ , т. е.  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . При этом  $AB = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$ ,  $BC = 2$ ,  $S_{\text{бок}} = 8 \cdot 1 = 8$ .

Приведём четыре задачи для самостоятельной работы учащихся.

**Задача 3.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$   $A_1B = 4\sqrt{2}$ . Какова должна быть длина ребра  $AA_1$ , чтобы площадь сечения призмы плоскостью  $AA_1K$ , где  $K$  — середина ребра  $BC$ , была наибольшей?

Указание. Положить  $\angle A_1BA = \alpha$  и найти  $S(\alpha)$  — площадь сечения призмы плоскостью  $AA_1K$ .

**Задача 4.** Радиус основания конуса равен 3, а высота конуса равна  $\sqrt{3}$ . Найдите наибольшую площадь сечения, проходящего через две образующие конуса.

Указание. Образующая конуса  $l = 2\sqrt{3}$ . Угол при вершине осевого сечения конуса равен  $\frac{2\pi}{3}$ . Пусть  $S(\alpha)$  — площадь сечения, проходящего через две образующие с углом  $\alpha$  между ними. Тогда  $S(\alpha) = 6 \sin \alpha$ , где  $0 < \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$ .  $S(\alpha)$  имеет наибольшее значение при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . При этом  $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$ , что является ответом к задаче.

Иногда ошибочно полагают, что наибольшую площадь имеет осевое сечение конуса. В данной задаче это не так:  $S_{\text{осев. сеч}} = 3\sqrt{3} < 6$ .

На уроках заключительного повторения следует обратить внимание на применение векторов при решении планиметрических и стереометрических задач. На конкретных задачах важно показать эффективность векторного метода по сравнению с традиционными методами. Приведём примеры.

**Задача 5.** Гранями параллелепипеда являются равные ромбы со стороной  $a$  и острым углом  $\alpha$ . Найдите длину большей диагонали ромба.

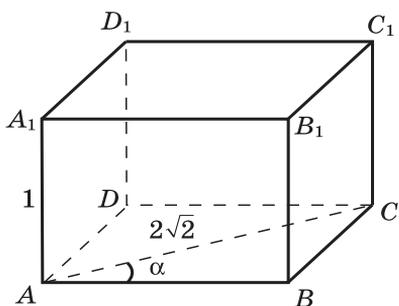


Рис. 8.2

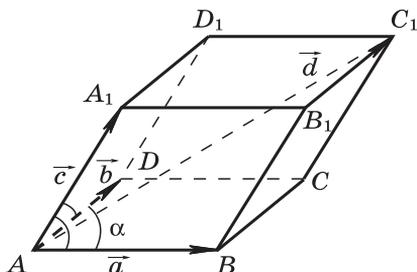


Рис. 8.3

Решение. Введём обозначения:  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AD} = \vec{b}$ ,  $\vec{AA}_1 = \vec{c}$ ,  $\vec{AC}_1 = \vec{d}$  (рис. 8.3). Тогда

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad AC_1 = |\vec{d}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2} = \sqrt{3a^2 + 6a^2 \cos \alpha}.$$

**Задача 6.** Найдите угол между медианами, проведёнными к катетам равнобедренного прямоугольного треугольника.

Решение. Пусть  $OAB$  — данный треугольник с катетами  $OA = OB = 1$ ,  $AD$  и  $BK$  — его медианы,  $\varphi$  — угол между ними, т. е. угол между прямыми, на которых лежат медианы. Введём систему координат, как показано на рисунке 8.4.

Тогда  $A(0; 1)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $K(0; 0,5)$ ,  $D(0,5; 0)$ , поэтому

$$\vec{AD} \{0,5; -1\}, \quad \vec{KB} \{1; -0,5\},$$

$$|\vec{AD}| = |\vec{KB}| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \vec{AD} \cdot \vec{KB} = 1,$$

следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{KB}}{|\vec{AD}| \cdot |\vec{KB}|} = \frac{4}{5}, \quad \varphi = \arccos \frac{4}{5}.$$

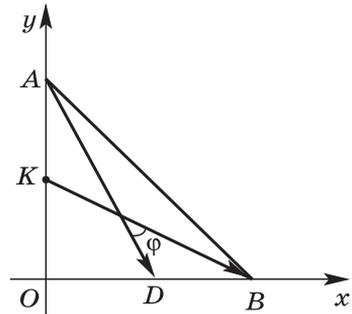


Рис. 8.4

## Рекомендации по проведению уроков заключительного повторения и организации домашней работы учащихся

На этих уроках можно использовать задания из разделов учебника: «Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар» (422—439, 541—556), «Задачи для повторения» (764—767), «Задачи для подготовки к ЕГЭ» (с. 229—239 учебника), «Задачи повышенной трудности» (768—815) для работы с сильными учащимися. Для всего класса пригодятся задачи из соответствующих разделов учебника по теме повторения, задачи подготовительного характера. Эти задачи составляются или подбираются учителем, некоторые задачи такого рода приведены ниже в рекомендациях к урокам.

## УРОКИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ПОВТОРЕНИЯ

### Уроки № 57—58

Используя текст учебника, нужно повторить аксиомы стереометрии и их следствия. Это имеет важное значение как для рассмотрения вопросов теории, так и для решения задач, в частности, на построение сечений многогранников. Затем рассматриваются доказательства теоремы о признаке параллельности прямой и плоскости, определение скрещивающихся прямых, доказательства теорем о признаке скрещивающихся прямых и признаке параллельности двух плоскостей. Использование понятий угла между скрещивающимися прямыми и перпендикулярности скрещивающихся прямых позволяет дать экономные решения многих задач на вычисление площадей поверхностей и объёмов тел.

Для организации классной и домашней работы учащихся можно использовать по теме уроков задачи 47, 103, а также задачи для подготовки к ЕГЭ из раздела С2.

На этих же уроках полезно рассмотреть задачи на построение сечений многогранников, например задачу 106. С этой же целью можно использовать слайды 8.1—8.6.

При этом имеется возможность повторить широкий круг теоретических вопросов по теме уроков.

#### 8.1

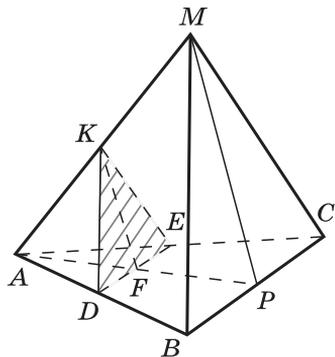
$MABC$  — правильная треугольная пирамида,  $AB = a$ ,  $MB = 2a$ .

1. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины рёбер  $AB$  и  $AC$  параллельно грани  $MBC$ .

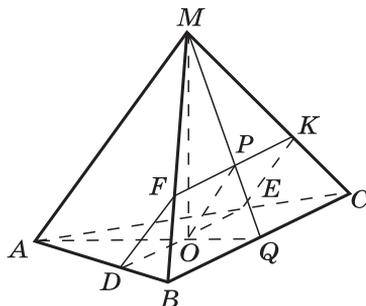
2. Вычислите периметр сечения.

3. Вычислите высоту  $KF$  сечения.

4. Укажите различные способы вычисления площади сечения.

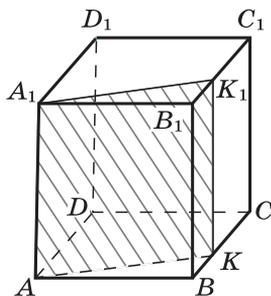


$MABC$  — правильная треугольная пирамида, точка  $O$  — центр окружности, вписанной в основание.



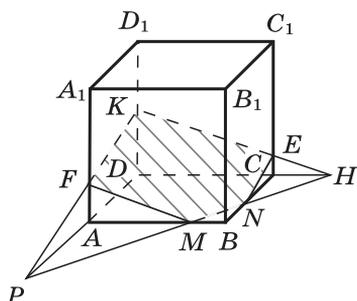
1. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $O$  параллельно рёбрам  $BC$  и  $AM$ .
2. Докажите, что сечение  $DEKF$  — прямоугольник.
3. Вычислите площадь сечения, если  $AB = a$ ,  $MA = b$ .
4. Вычислите величину двугранного угла при основании пирамиды, если  $AB = 6$ ,  $MO = 3$ .

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — правильная четырёхугольная призма,  $K \in BC$ ,  $BK : KC = 1 : 2$ .



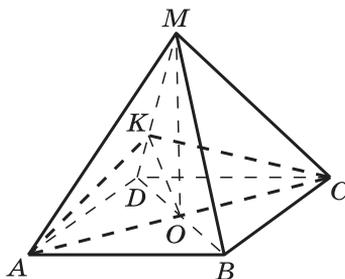
1. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки  $A$ ,  $A_1$  и  $K$ .
2. Докажите, что сечение  $AA_1K_1K$  — прямоугольник.
3. Найдите площадь сечения, если  $AB = a$ ,  $AA_1 = 3a$ .

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб,  $M \in AB$ ,  $N \in BC$ ,  $K \in DD_1$ .



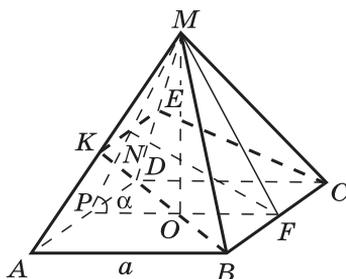
1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$ .
2. Объясните, как можно использовать условия  $KF \parallel NE$ ,  $MF \parallel EK$  при построении сечения.

$MABCD$  — правильная четырёхугольная пирамида. Через диагональ  $AC$  основания проведена плоскость перпендикулярно к ребру  $MD$ .



1. Докажите, что сечение  $KAC$  — равнобедренный треугольник.
2. Докажите, что отрезок  $KO$  является высотой треугольника  $KAC$ .
3. Вычислите угол  $MDO$  и  $S_{AKC}$ , если  $AB = a$ ,  $MD = a\sqrt{2}$ .
4. Верно ли, что  $\angle AKC = 2 \arctg \frac{2}{\sqrt{3}}$ ?

$MABCD$  — правильная четырёхугольная пирамида. Через сторону  $BC$  основания проведена плоскость, пересекающая противоположную грань пирамиды.



1. Докажите, что:
  - а)  $KE \parallel BC$ ;
  - б)  $\triangle ABK = \triangle DCE$ ,  $BK = CE$ ;
  - в) сечение  $BKEC$  — равнобедренная трапеция.
2. Составьте план вычисления площади трапеции, если  $AB = a$ ,  $\angle MPO = \alpha$ , точки  $P$  и  $F$  — середины рёбер  $AD$  и  $BC$ .

**Задача 7.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб с ребром, равным 4.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $K$ ,  $C$  и  $D_1$ , где  $K$  — середина ребра  $AB$ .

б) Вычислите периметр  $P$  сечения.

**Решение.**

а) Искомое сечение заштриховано на рисунке 8.5.

б)  $D_1C = 4\sqrt{2}$ ,

$$\begin{aligned} KE &= 2\sqrt{2}, \\ D_1E = CK &= \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}; \\ P &= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 \cdot 2\sqrt{5} = \\ &= 6\sqrt{2} + 4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

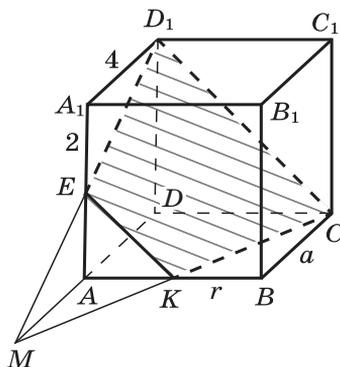


Рис. 8.5



## Урок № 60

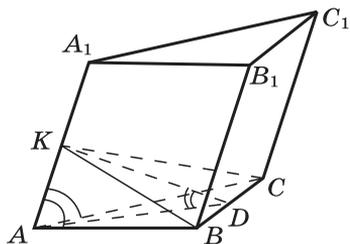
Рассматриваются понятие двугранного угла, доказательство теоремы о признаке перпендикулярности двух плоскостей, свойство прямоугольного параллелепипеда.

Полезно обратить внимание учащихся на следующее обстоятельство, используемое при решении задач: если в прямом двугранном угле провести перпендикуляр из произвольной точки одной грани к ребру, то он будет являться перпендикуляром к другой грани.

Для организации классной и домашней работы учащихся можно использовать задачи 212, 216, 541, 547, 548, слайд 8.8, задачи подготовительного характера. Приведём одну из таких задач.

8.8

Основание наклонной призмы — равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB = AC$ ,  $\angle A_1AB = \angle A_1AC$ . Плоскость  $KBC$  перпендикулярна к ребру  $AA_1$ .



1. Объясните, как построить линейный угол  $ADK$  двугранного угла  $ABCK$ .
2. Найдите  $S_{KBC}$ , если  $S_{ABC} = 20 \text{ см}^2$ ,  $\angle ADK = 60^\circ$ .
3. Найдите объём призмы, если  $S_{KBC} = 10 \text{ см}^2$ ,  $AA_1 = 5 \text{ см}$ .

**Задача 8.** Основанием пирамиды  $MABC$  является равносторонний треугольник  $ABC$  со стороной  $a$ . Грань  $MAB$  — равнобедренный треугольник, плоскость которого перпендикулярна к плоскости основания пирамиды,  $MA = MB = \frac{a\sqrt{7}}{4}$ . Найдите углы наклона боковых граней пирамиды к её основанию.

Решение. Высоты треугольников  $ABM$  и  $ABC$ , проведённые из вершин  $M$  и  $C$ , являются одновременно медианами, поэтому пересекаются в одной точке  $D$  (рис. 8.6). Угол  $MDC$  — линейный угол двугранного угла с ребром  $AB$ , поэтому  $\angle MDC = 90^\circ$ .

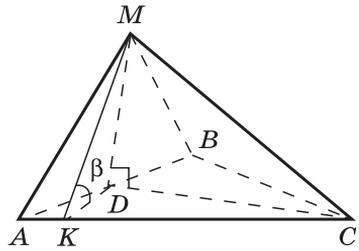


Рис. 8.6

Проведём  $DK \perp AC$  и отрезок  $MK$ . Тогда  $AC \perp MK$  по теореме о трёх перпендикулярах.  $\angle MKD$  — линейный угол двугранного угла с ребром  $AC$ . Пусть  $\angle MKD = \beta$ .

Из треугольника  $MAD$  находим  $MD = \sqrt{\frac{7a^2}{16} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ .

Из треугольника  $AKD$  получаем  $KD = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ .

Из треугольника  $MKD$  имеем  $\operatorname{tg} \beta = \frac{MD}{KD} = 1$ ,  $\beta = 45^\circ$ .

## 8.9

Основанием пирамиды  $MABCD$  служит прямоугольник,  $MA$  — высота пирамиды,  $MC = 5\sqrt{2}$ . Какова должна быть длина ребра  $BC$ , чтобы площадь грани  $MBC$  имела наибольшее значение?

Решение. Введём обозначения:  $\angle CMB = \alpha$ ,  $S_{MBC} = S(\alpha)$ .

1)  $\triangle MBC$  прямоугольный.

2)  $MB = 5\sqrt{2} \cos \alpha$ ,

$BC = 5\sqrt{2} \sin \alpha$ ,

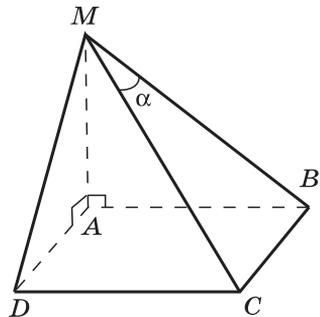
$S(\alpha) = 12,5 \sin 2\alpha$ .

3)  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < 2\alpha < \pi$ .

$S(\alpha)$  имеет наибольшее значение, если  $\sin 2\alpha = 1$ , т. е.

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ . При этом  $BC = 5$ .

4) Докажите, что если  $BC = 5$ , то  $AB < BC$ .



## Уроки № 61—62

Повторяется материал, связанный с понятиями многогранника, призмы, пирамиды (полной и усечённой), рассматривается вывод формул для вычисления площадей поверхностей многогранников.

Для классной и домашней работы можно использовать по теме уроков задачи 229, 230, 242, 248, задачи для подготовки к ЕГЭ, а также приведённые выше задачи на экстремумы 1—4, решаемые введением вспомогательного угла, и слайд 8.9. Кроме того, можно использовать задачи 764—767.

## Урок № 63

Повторяется материал, связанный с понятиями цилиндра, конуса, сферы и шара, формулами площадей поверхностей цилиндра и конуса, взаимным расположением сферы и плоскости.

Используются выборочно задачи 326, 334, 342, 350, 361, 375, 385, 389, 552, а также подготовительные задачи, приведённые ниже.

*Задача 9.* В конус вписана пирамида  $MABC$ , основанием которой служит прямоугольный треугольник с катетами  $AB = 12$  см и  $BC = 16$  см. Двугранный угол при катете  $BC$  равен  $60^\circ$ . Найдите:

а) площадь грани  $MBC$ ;

б) площадь боковой поверхности конуса.

*Задача 10.* Высота конуса равна  $h$ , образующая равна  $l$ . Найдите радиус описанного около конуса шара.

## Уроки № 64—65

На уроках рассматриваются формулы объёмов прямой призмы, цилиндра, наклонной призмы, пирамиды, конуса и шара. Используются выборочно задачи 484, 490, 499, 553—556, слайды 8.10, 8.11, 8.12, 8.13.

В усечённый конус вписан шар. Докажите, что площадь сферы меньше площади боковой поверхности конуса.

Решение. Введём обозначения:

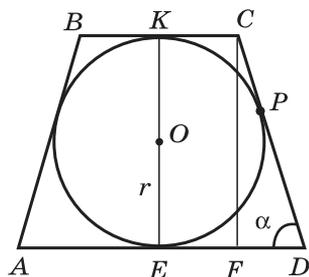
$$OE = r, \quad KC = r_1, \quad ED = r_2,$$

$$CD = l, \quad \angle CDF = \alpha.$$

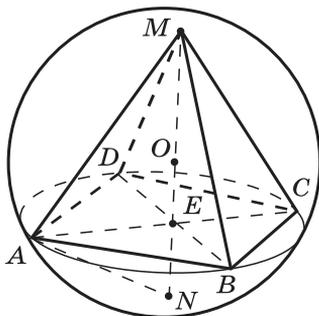
Тогда  $S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2$ ,  $r_1 + r_2 = l$   
(объясните почему),

$$l = \frac{2r}{\sin \alpha}, \quad S_{\text{усеч. кон}} = \pi(r_1 + r_2)l = \pi l^2 = \pi \cdot \frac{4r^2}{\sin^2 \alpha};$$

$$\frac{S_{\text{сферы}}}{S_{\text{усеч. кон}}} = \sin^2 \alpha < 1.$$



Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 8, боковое ребро равно 12. Найдите объём описанного шара.



Решение.

$MN$  — диаметр сферы.

$$\frac{MN}{MA} = \frac{MA}{ME}, \quad \frac{2R}{12} = \frac{12}{8}, \quad R = 9, \quad V = 972\pi.$$

Дайте необходимые пояснения.

Ребро правильного тетраэдра равно 12. Найдите радиусы описанного и вписанного шаров и объём вписанного шара.

Решение. В правильном тетраэдре центры описанного и вписанного шаров совпадают (объясните почему). Пусть  $O$  — центр этих шаров.

Способ 1.

$$\text{Пусть } \angle AKD = \alpha, \sin \alpha = \frac{AD}{AK} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Из } \triangle MOD: MO = \frac{6}{\cos \alpha} = 3\sqrt{6}, \text{ т. е. } R = 3\sqrt{6}.$$

$$\text{Из } \triangle EOK: EO = EK \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}, \text{ т. е. } r = \sqrt{6}.$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 8\pi\sqrt{6}.$$

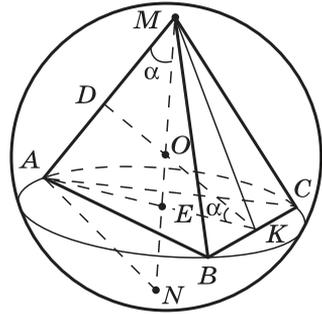
Способ 2.

Треугольник  $MAN$  прямоугольный,  $\frac{MN}{MA} = \frac{MA}{ME}$ .

Способ 3.

$$\triangle MAE \sim \triangle MDO, \frac{ME}{MA} = \frac{MD}{MO}.$$

Продолжите решения в способах 2 и 3.



В прямую треугольную призму, основанием которой служит правильный треугольник со стороной  $a$ , вписан шар. Найдите площадь сферы.

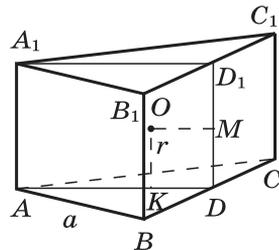
Решение. Шар касается боковых граней и оснований призмы. Высота призмы равна диаметру шара.

Проекция шара на плоскость основания призмы есть круг, вписанный в треугольник  $ABC$ .

Вычислим радиус этого круга:  $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ . Поэтому

$$S_{\text{сферы}} = \frac{\pi a^2}{3}.$$

Дайте необходимые пояснения.



Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , ребро которого равно 1. Найдите угол между векторами  $\vec{DA}_1$  и  $\vec{DM}$ , где точка  $M$  — середина ребра  $CC_1$ .

Решение. Способ 1.

Введём систему координат, как показано на рисунке. Тогда

$$D(0; 0; 0), A_1(0; 1; 1),$$

$$M(1; 0; 0,5),$$

$$\vec{DA}_1\{0; 1; 1\}, \vec{DM}\{1; 0; 0,5\},$$

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0,5 \cdot 1}{\sqrt{1,25} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

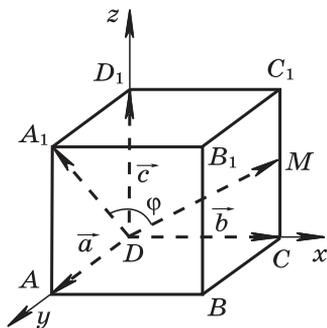
Способ 2.

$$\vec{DA} = \vec{a}, \vec{DC} = \vec{b}, \vec{DD}_1 = \vec{c}.$$

$$\vec{DA}_1 \cdot \vec{DM} = (\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + 0,5\vec{c}) = 0,5;$$

$$|\vec{DM}| = \sqrt{1,25}, |\vec{DA}_1| = \sqrt{2}, \cos \varphi = \frac{\vec{DA}_1 \cdot \vec{DM}}{|\vec{DM}| \cdot |\vec{DA}_1|} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Дайте необходимые пояснения.



## Урок № 66

Повторяются понятие вектора в пространстве, действия над векторами, правило параллелепипеда, рассматриваются решения простейших задач в координатах, скалярное произведение векторов.

Для классной и домашней работы можно использовать задачи 598, 606, 644, 663, 684, 703, слайд 8.14, а также подготовительные задачи 5 и 6, приведённые выше.

## Уроки № 67—68

В соответствии с учебным планом по математике на изучение геометрии в 11 классе отводится 68 ч, поэтому в планировании учебного материала резервными являются уроки № 67—68.

Ниже приведены краткие решения нескольких задач из раздела учебника «Задачи повышенной трудности». Они предназначены для работы с учащимися, которые проявляют повышенный интерес к изучению геометрии.

**Задача 770.** Все плоские углы тетраэдра  $OABC$  при вершине  $O$  равны  $90^\circ$ . Докажите, что площадь треугольника  $AOB$  равна среднему геометрическому площадей треугольников  $ABC$  и  $O_1AB$ , где  $O_1$  — проекция точки  $O$  на плоскость  $ABC$ .

**Решение.** По условию  $OC \perp OA$  и  $OC \perp OB$  (рис. 8.7), поэтому  $OC \perp AOB$ . Проведём  $OD \perp AB$ , тогда  $CD \perp AB$  (по теореме о трёх перпендикулярах). Высота в треугольнике  $COD$ , проведённая из вершины  $O$ , является перпендикуляром к плоскости  $ABC$  (объясните почему), поэтому основание этой высоты есть проекция точки  $O$  на плоскость  $ABC$  (точка  $O_1$ ).

Далее,

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OD, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD,$$

$$S_{O_1AB} = \frac{1}{2} AB \cdot O_1D.$$

Требуется доказать, что

$$S_{AOB} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{O_1AB}}, \quad \text{т. е.}$$

$$OD = \sqrt{CD \cdot O_1D}.$$

Но это равенство действительно верно, так как катет  $OD$  в прямоугольном треугольнике  $COD$  есть среднее геометрическое гипотенузы  $CD$  и проекции  $O_1D$  этого катета на гипотенузу.

Заметим, что в решении задачи не использовалось условие, что  $\angle AOB = 90^\circ$ , т. е. это условие является лишним. Утверждение справедливо, если только плоские углы  $AOC$  и  $BOC$  равны  $90^\circ$ .

**Задача 777.** Комната имеет форму куба. Паук, сидящий в середине ребра, хочет, двигаясь по кратчайшему пути, поймать муху, сидящую в одной из самых удалённых от паука вершин куба. Как должен двигаться паук?

**Решение.** Положения паука ( $P$ ) и мухи ( $M$ ) изображены на рисунке 8.8, а. Один из возможных путей паука состоит из отрезков  $PQ$  (в плоскости грани  $ABCD$ ) и  $MQ$  (в плоскости грани  $AKMB$ ). Как выбрать точку  $Q$  на ребре  $AB$ , чтобы путь  $PQM$  был наименьшим при движении по этим двум граням? Чтобы ответить на этот вопрос и найти другие возможные пути паука, рассмотрим развёртку куба (рис. 8.8, б).

Ясно, что путь  $PQM$  будет наименьшим при движении по указанным граням, если в качестве точки  $Q$  взять точку пересечения отрезков  $PM$  и  $AB$ . Если ребро куба равно  $a$ , то путь  $PQM$  в этом случае равен

$$l_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2} a.$$

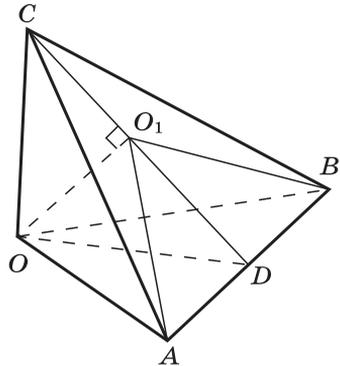


Рис. 8.7

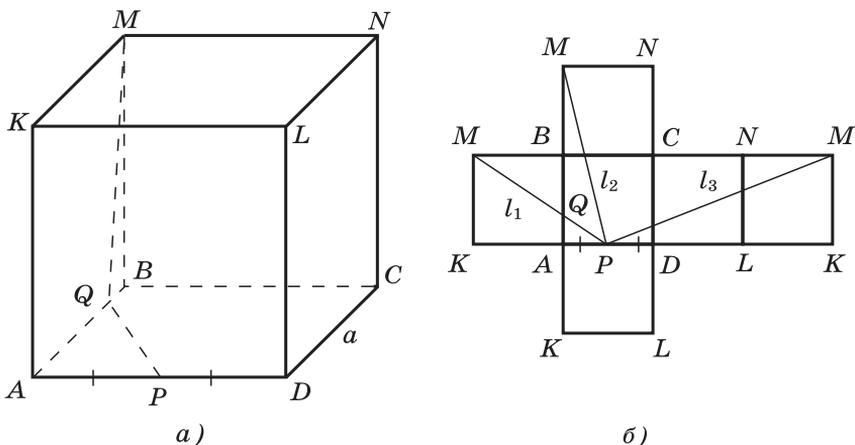


Рис. 8.8

Два других возможных пути паука, представленные на рисунке 8.8, б, имеют следующие длины:

$$l_2 = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2} a, \quad l_3 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{5}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{2} a.$$

Наименьшим из рассмотренных трёх путей является первый.

Можно иначе развернуть куб и указать другие возможные пути паука. В частности, возможен путь длиной  $l_1$  по граням  $AKLD$  и  $AKMB$ , но пути более короткого, чем  $l_1$ , нет.

**Задача 778.** Докажите, что в кубе можно вырезать сквозное отверстие, через которое можно протащить куб таких же и даже больших размеров.

**Решение.** Пусть дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  со стороной  $a$ . Проведём плоскость, перпендикулярную к диагонали  $A_1 C$  куба, так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник  $KLMNPT$  со стороной  $a \frac{\sqrt{2}}{2}$ . (Его вершины являются серединами рёбер куба.) Спроецируем куб на плоскость сечения. Получится правильный шестиугольник  $A'B'V_1C_1'D_1'D'$ , вершинами которого являются проекции соответствующих вершин куба. (Обоснуйте это утверждение.)

На рисунке 8.9, а показано построение шестиугольника  $A'B'V_1C_1'D_1'D'$ , а на рисунке 8.9, б дано его отдельное изображение. Сторона этого шестиугольника равна  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ , а диаметр вписанной окружности равен  $a\sqrt{2}$ , т. е. равен диагонали грани куба. Поэтому если взять за ось отверстия диагональ  $A_1 C$  куба, то это отверстие можно сделать квадратным со стороной, несколько большей  $a$ . В это отверстие можно

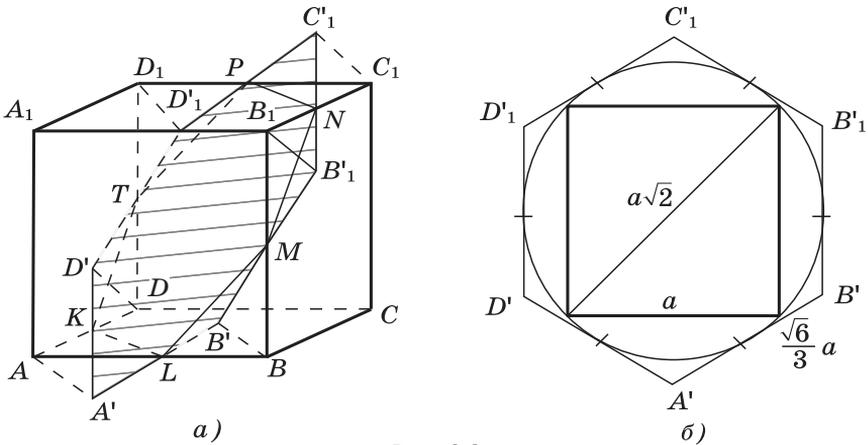


Рис. 8.9

протащить куб, ребро которого равно или даже немного больше  $a$ .

Комментарий к решению. Зададим учащимся вопрос: «Можно ли в кубе вырезать сквозное отверстие так, чтобы через него можно было протащить куб таких же и даже больших размеров?»

Многие школьники дадут отрицательный ответ, доверяя своему здравому смыслу, который говорит им, что одна вещь не может поместиться в другой такой же. В самом деле, стакан не войдёт в другой такой же, две одинаковые кастрюли друг в друга не войдут и т. д. Здесь излишнее доверие к очевидности подводит учеников, так как они неявно заменяют одну проблему другой.

На самом деле для ответа на вопрос задачи следует сравнивать не объёмы, а линейные величины — ребро куба со стороной возможного квадратного отверстия.

На рисунке 8.9, а выделен шестиугольник, который является как бы тенью куба, отбрасываемой на плоскость, перпендикулярную к прямой  $A_1C$ . Оказывается, в эту «тень» можно вписать круг, в который, в свою очередь, вписывается грань куба (см. рис. 8.9, б). Теперь нетрудно сообразить, что если аккуратно вдоль оси  $A_1C$  проделать в кубе отверстие квадратного сечения со стороной чуть больше, чем ребро куба (но не задевающее границ «тени»), то сквозь это отверстие свободно пройдёт куб такого же размера и даже чуть большего.

**Задача 794.** Все плоские углы тетраэдра  $OABC$  при вершине  $O$  прямые. Докажите, что проекция вершины  $O$  на плоскость  $ABC$  есть точка пересечения высот треугольника  $ABC$ .

Решение. Пусть  $O_1$  — проекция вершины  $O$  на плоскость грани  $ABC$ . Докажем, что  $\vec{AO}_1 \cdot \vec{BC} = 0$  (рис. 8.10).

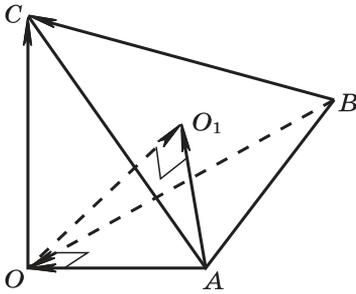


Рис. 8.10

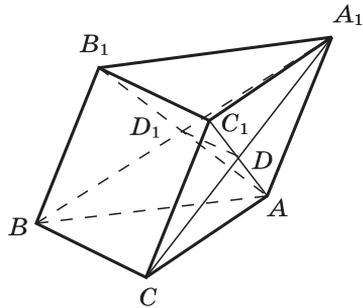


Рис. 8.11

В самом деле,  $\vec{AO}_1 \cdot \vec{BC} = (\vec{AO} + \vec{OO}_1) \cdot \vec{BC} = \vec{AO} \cdot \vec{BC}$ , так как  $OO_1 \perp BC$ .

Но  $\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC}$ , поэтому

$$\vec{AO} \cdot \vec{BC} = \vec{AO} \cdot (\vec{BO} + \vec{OC}) = \vec{AO} \cdot \vec{BO} + \vec{AO} \cdot \vec{OC} = 0,$$

так как  $AO \perp BO$  и  $AO \perp OC$  по условию.

Итак,  $\vec{AO}_1 \cdot \vec{BC} = 0$ , т. е.  $AO_1 \perp BC$ . Аналогично доказывается, что  $BO_1 \perp AC$  и  $CO_1 \perp AB$ . Следовательно,  $O_1$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ .

**Задача 798.** В тетраэдр с высотами  $h_1, h_2, h_3, h_4$  вписан шар радиуса  $R$ . Докажите, что  $\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$ .

**Решение.** Соединим центр  $O$  вписанного шара отрезками с вершинами данного тетраэдра. Тетраэдр разобьётся на четыре тетраэдра с общей вершиной  $O$ . В каждом из этих тетраэдров высота, проведённая из вершины  $O$ , равна  $R$  (радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен к касательной плоскости), а основанием является грань данного тетраэдра. Поэтому объём  $V$  данного тетраэдра можно вычислить по формуле

$$V = \frac{1}{3} R(S_1 + S_2 + S_3 + S_4),$$

где  $S_1, S_2, S_3, S_4$  — площади его граней. Отсюда получаем

$$\frac{1}{R} = \frac{S_1}{3V} + \frac{S_2}{3V} + \frac{S_3}{3V} + \frac{S_4}{3V}.$$

С другой стороны,

$$V = \frac{1}{3} h_1 S_1, \text{ и поэтому } \frac{S_1}{3V} = \frac{1}{h_1}.$$

Аналогично

$$\frac{S_2}{3V} = \frac{1}{h_2}, \quad \frac{S_3}{3V} = \frac{1}{h_3}, \quad \frac{S_4}{3V} = \frac{1}{h_4}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4},$$

что и требовалось доказать.

**Замечание.** Отметим, что аналогичное равенство имеет место для любого треугольника:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3},$$

где  $r$  — радиус вписанной в треугольник окружности,  $h_1, h_2, h_3$  — высоты треугольника.

**Задача 802.** Плоскости  $AB_1C_1$  и  $A_1BC$  разбивают треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$  на четыре части. Найдите отношение объёмов этих частей.

**Решение.** Введём обозначения:  $V$  — объём всей призмы  $ABCA_1B_1C_1$ ,  $V_1, V_2, V_3$  — объёмы пирамид  $A_1ADD_1, A_1DD_1B_1C_1, ADD_1BC$  соответственно,  $V_4$  — объём многогранника  $CDC_1BD_1B_1$  (рис. 8.11). Тогда

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{3}V, \quad V_1 + V_3 = \frac{1}{3}V, \quad (1)$$

откуда  $V_2 = V_3$ .

Далее,  $DD_1$  — средняя линия треугольника  $AB_1C_1$  (объясните почему), поэтому  $S_{B_1D_1DC_1} = 3S_{AD_1D}$ , следовательно,  $V_2 = 3V_1$ . Отсюда с учётом равенства (1) получаем

$$V_1 = \frac{1}{12}V, \quad V_2 = V_3 = \frac{1}{4}V,$$

и, значит,

$$V_4 = V - \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) V = \frac{5}{12}V.$$

Итак,  $V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = 1 : 3 : 3 : 5$ .

**Задача 803.** Докажите, что объём тетраэдра равен  $\frac{abc \sin \varphi}{6}$ ,

где  $a$  и  $b$  — противоположные рёбра, а  $\varphi$  и  $c$  соответственно угол и расстояние между ними.

**Решение.** Пусть в тетраэдре  $DABC$   $BC = a$ ,  $AD = b$ ,  $\varphi$  и  $c$  — угол и расстояние между рёбрами  $BC$  и  $AD$ . Построим тетраэдр до треугольной призмы  $ABCDB_1C_1$  (рис. 8.12). Тогда  $\angle B_1BC = \varphi$ , ребро  $AD$  параллельно плоскости грани  $BB_1C_1C$  и расстояние между ними равно  $c$ .

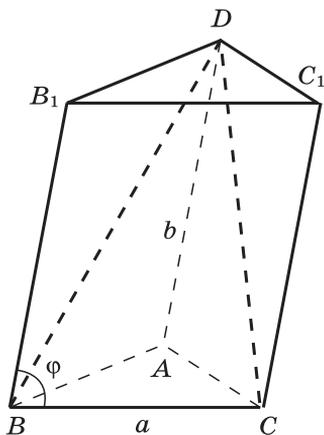


Рис. 8.12

Объём  $V$  тетраэдра  $DABC$  равен одной трети объёма  $V'$  призмы:  $V = \frac{1}{3}V'$ . С другой стороны,

$$V' = \frac{1}{2}S_{BB_1C_1C} \cdot c$$

(задача 526), а  $S_{BB_1C_1C} = ab \sin \varphi$ . Поэтому

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ab \sin \varphi \cdot c = \frac{1}{6} abc \sin \varphi.$$

**Задача 811.** В конус вписан шар. Докажите, что отношение объёмов конуса и шара равно отношению площадей полной поверхности конуса и сферы, являющейся границей шара.

Решение. *Способ 1.*

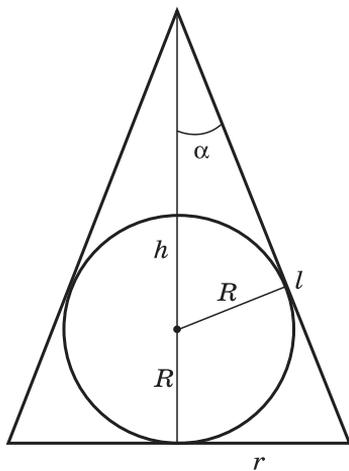
На рисунке 8.13, а изображено осевое сечение конуса, в который вписан шар радиуса  $R$ . Требуется доказать, что

$$\frac{V_{\text{к}}}{V_{\text{ш}}} = \frac{S_{\text{к}}}{S_{\text{ш}}}, \text{ или } \frac{V_{\text{к}}}{S_{\text{к}}} = \frac{V_{\text{ш}}}{S_{\text{ш}}} = \frac{4\pi \frac{R^3}{3}}{4\pi R^2} = \frac{1}{3}R.$$

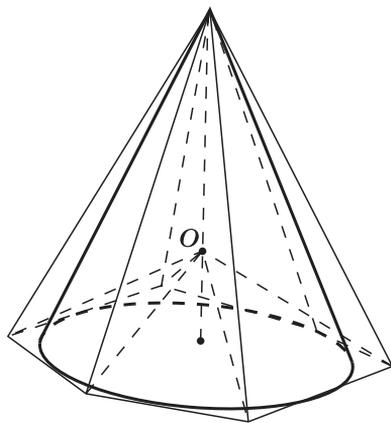
Пусть  $h$  — высота конуса,  $r$  — радиус основания,  $l$  — образующая,  $2\alpha$  — угол при вершине осевого сечения. Тогда

$$h = R + \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\sin \alpha} R, \quad r = h \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} R,$$

$$l = \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} R.$$



а)



б)

Рис. 8.13

Поэтому

$$V_{\kappa} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \frac{(1 + \sin \alpha)^3}{\sin \alpha \cos^2 \alpha} R^3, \quad S_{\kappa} = \pi r l + \pi r^2 = \pi \frac{(1 + \sin \alpha)^3}{\sin \alpha \cos^2 \alpha} R^2,$$

откуда  $\frac{V_{\kappa}}{S_{\kappa}} = \frac{1}{3} R$ , что и требовалось доказать.

*Способ 2.*

Равенство  $\frac{V_{\kappa}}{S_{\kappa}} = \frac{1}{3} R$  можно доказать без сложных вычис-

лений. Рассмотрим правильную пирамиду, описанную около конуса (рис. 8.13, б). Шар, вписанный в конус, является вписанным и в эту пирамиду. Соединим центр шара (точку  $O$ ) отрезками со всеми вершинами пирамиды. Пирамида разобьётся на несколько пирамид с общей вершиной  $O$  и равными  $R$  высотами, проведёнными из вершины  $O$ . Поэтому объём  $V_{\Pi}$  пирамиды равен  $\frac{1}{3} R S_{\Pi}$ , где

$S_{\Pi}$  — площадь полной поверхности пирамиды, откуда  $\frac{V_{\Pi}}{S_{\Pi}} = \frac{1}{3} R$ , т. е. для любой описанной пирамиды отношение

$\frac{V_{\Pi}}{S_{\Pi}}$  имеет одно и то же значение, равное  $\frac{1}{3} R$ .

Будем теперь неограниченно увеличивать число сторон основания описанной пирамиды. Тогда её объём и площадь поверхности будут стремиться соответственно к объёму и площади полной поверхности конуса. В пределе получим

$$\frac{V_{\kappa}}{S_{\kappa}} = \frac{1}{3} R.$$

## Содержание

Предисловие . . . . .	3
Примерное тематическое планирование учебного материала	5
<b>Введение</b> . . . . .	16
<b>Глава I. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ</b> . . . . .	25
§ 1. Параллельность прямых, прямой и плоскости . . . . .	—
§ 2. Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми . . . . .	31
§ 3. Параллельность плоскостей . . . . .	37
§ 4. Тетраэдр и параллелепипед . . . . .	40
<b>Глава II. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ</b>	55
§ 1. Перпендикулярность прямой и плоскости . . . . .	—
§ 2. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью . . . . .	66
§ 3. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей	75
<b>Глава III. МНОГОГРАННИКИ</b> . . . . .	88
§ 1. Понятие многогранника. Призма . . . . .	—
§ 2. Пирамида . . . . .	95
§ 3. Правильные многогранники . . . . .	107
<b>Глава IV. ЦИЛИНДР, КОНУС И ШАР</b> . . . . .	115
§ 1. Цилиндр . . . . .	—
§ 2. Конус . . . . .	119
§ 3. Сфера . . . . .	122
<b>Глава V. ОБЪЁМЫ ТЕЛ</b> . . . . .	134
§ 1. Объём прямоугольного параллелепипеда . . . . .	—
§ 2. Объёмы прямой призмы и цилиндра . . . . .	136
§ 3. Объёмы наклонной призмы, пирамиды и конуса . .	141
§ 4. Объём шара и площадь сферы . . . . .	152
<b>Глава VI. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ</b> . . . . .	158
§ 1. Понятие вектора в пространстве . . . . .	—
§ 2. Сложение и вычитание векторов. Умножение век- тора на число . . . . .	159
§ 3. Компланарные векторы . . . . .	166
<b>Глава VII. МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ</b> . . . . .	172
§ 1. Координаты точки и координаты вектора . . . . .	—
§ 2. Скалярное произведение векторов . . . . .	187
§ 3. Движения . . . . .	202
Материалы по организации заключительного повторения и подготовки к ЕГЭ . . . . .	210